**Konveksna optimizacija**

***Definicija*.** Optimizacijska naloga (*D*,*f*,*opt*) je ***konveksna optimizacijska naloga***, če velja:

1. *D* je konveksna množica v R*n*,

2. *f*:*D*→R je konveksna funkcija,

3. *opt*=min.

***Definicija****.* Množica *A*⊆R*n* je ***konveksna***, če za vse *x*,*y*∈*A* in *λ*∈[0,1] velja: *λx*+(1−*λ*)*y*∈*A*.

Pokazali smo, da je presek vsake družine konveksnih množic v R*n* konveksen, in da je vsota konveksnih množic *A*+*B*={*x*+*y*; *x*∈*A*,*y*∈*B*} konveksna.

***Definicija****.* Naj bodo *x*1,…,*xk*∈R*n* in *λ*1,…,*λk*∈R. Vektor ∑*ki*=1*λixi* je ***konveksna kombinacija***vektorjev *x*1,…,*xk*, če velja: *λ*1,…,*λk*≥0 in ∑*ki*=1*λi*=1.

Pokazali smo, da konveksna množica vsebuje vse konveksne kombinacije svojih elementov.

Pokazali smo, da je vsak *afini podprostor* v R*n* konveksna množica.

**Konveksna ovojnica**  C(*A*) poljubne množice *A*⊆R*n* je presek družine vseh konveksnih množic, ki vsebujejo *A*. Pokazali smo, da je C(*A*) najmanjša konveksna množica, ki vsebuje *A*, in da je enaka množici vseh konveksnih kombinacij elementov množice *A*.

Vsaka *hiperravnina* in vsak *zaprt polprostor* je konveksna množica. Presek končno mnogo zaprtih polprostorov imenujemo ***konveksni polieder***.

Definirali smo ***konveksne stožce*** v R*n* kot množice, ki hkrati s katerimakoli svojima točkama vsebujejo tudi vse njune nenegativne linearne kombinacije. Množico *S*(*a*1,*a*2,…,*am*), kjer so *a*1,*a*2,…,*am* vektorji v R*n*, smo imenovali konveksni stožec, ki ga razpenjajo *a*1,*a*2,…,*am*. Množici *A*⊆R*n* smo priredili njen dualni stožec *A*∗, ki vsebuje tiste *x*∈R*n*, ki z vsakim elementom množice *A* tvorijo oster ali pravi kot.

**Farkaseva lema** **v geometrijski obliki (FLg)**:

*S*(*a*1,*a*2,…,*am*)∗∗=*S*(*a*1,*a*2,…,*am*)

**Farkaseva lema v algebraični obliki,** **1. varianta (FLa1)**:

∃*x*≥0: *Ax*=*b*⟺∀*y*:(*ATy*≥0⇒⟨*b*,*y*⟩≥0).

**Farkaseva lema v algebraični obliki,** **2. varianta (FLa2)**:
∃*x*≥0: *Ax*≤*b*⟺∀*y*≥0:(*ATy*≥0⇒⟨*b*,*y*⟩≥0).

Farkasevo lemo FLa1 lahko uporabimo za dokazovanje nerešljivosti sistema linearnih enačb, FLa2 pa za dokazovanje nerešljivosti sistema linearnih neenačb.

***Definicija****.* Preslikava *f*:*A*→R, kjer je *A* konveksna podmnožica evklidskega prostora R*n*, je **konveksna funkcija**, če za vse *x*,*y*∈R in *λ*∈[0,1] velja: *f*(*λx*+(1−*λ*)*y*)≤*λf*(*x*)+(1−*λ*)*f*(*y*).

Geometrijsko: zveznica dveh točk na grafu konveksne funkcije leži nad grafom.

***Zgledi****:* Preslikava *f*: R→R*,* kjer je *f*(*x*)=*x*2, je konveksna funkcija. Vsaka linearna funkcija, vsaka afina funkcija in vsaka norma je konveksna funkcija.

***Lastnosti zaprtosti za operacije***:

1. Vsota konveksnih funkcij je konveksna.

2. Produkt konveksne funkcije z nenegativno konstanto je konveksen.

3. Naj bo *A*⊆R*n* konveksna množica.

3.a) Če je *g*:*A*→R*k* linearna in *f*:*g*(*A*)→R konveksna, je kompozitum *f*∘*g*:*A*→R konveksen.

3.b) Če je *g*:*A*→R*k* konveksna in *f*: C(*g*(*A*))→R nepadajoča konveksna, je kompozitum *f*∘*g*:*A*→R konveksen.

Dokazali smo naslednjo karakterizacijo konveksnih funkcij s pomočjo prvih odvodov:

*Naj bo* Ω odprta konveksna množica v R*n* in *f*:Ω→R zvezno odvedljiva na Ω. Potem je *f* konveksna na Ω natanko tedaj, ko za vse *x*,*y*∈Ω velja: *f*(*x*)≥*f*(*y*)+⟨*x*−*y*,∇*f*(*y*)⟩.

Geometrijsko: graf konveksne funkcije leži nad tangentno hiperravnino.

Navedli smo tudi karakterizacijo konveksnih funkcij s pomočjo drugih odvodov:

*Naj bo*Ω *odprta konveksna množica v* R*n in f*:Ω→R *dvakrat zvezno odvedljiva na* Ω*. Potem je f konveksna na*Ω *natanko tedaj, ko je Hessejeva matrika Hf*(*x*) pozitivno semidefinitna za vse *x*∈Ω.

Ogledali smo si splošno kvadratno funkcijo *n* spremenljivk *f*(*x*)=⟨*Ax*,*x*⟩+⟨*b*,*x*⟩+*c,* kjer je *A* simetrična realna matrika velikosti *n*×*n, b* realen *n-*razsežen vektor in *c* realno število. Pokazali smo, da je kvadratna funkcija konveksna natanko tedaj, ko je matrika *A* pozitivno semidefinitna.

Po definiciji in pregledu nekaterih lastnosti konveksnih množic in konveksnih funkcij smo se vrnili k pojmu konveksne optimizacijske naloge. Pokazali smo, da je vsak linearen program konveksna optimizacijska naloga.

**Definicija.** Naj bo *D*⊆R*n* in *f*:*D*→R.

Točka *x*∈*D* je (globalni) minimum *f* na *D*, če ∀*y*∈*D*: *f*(*x*)≤*f*(*y*).

Točka *x*∈*D* je lokalni minimum *f* na *D*, če ∃*ε*>0 ∀*y*∈*D*: (||*x*−*y*||<*ε* ⇒ *f*(*x*)≤*f*(*y*)).

Dokazali smo ***izrek o lokalni minimizaciji konveksne funkcije***:  *Naj bo D konveksna množica v* R*n in f*:*D*→R *konveksna funkcija. Potem je vsak lokalni minimum f na D tudi globalni.*

Gornji izrek kaže na pomembnost konveksnosti pri optimizaciji, saj je v splošnem lokalne ekstreme precej laže poiskati kot pa globalne ekstreme.