Konveksna optimizacija

Definicija. Optimizacijska naloga (D,f,opt) je ***konveksna optimizacijska naloga***, če velja:

1. D je konveksna množica v $\mathbb{R}^n$,
2. $f:D\to\mathbb{R}$ je konveksna funkcija,
3. $opt=\min$.

Definicija. Množica $A\subseteq\mathbb{R}^n$ je ***konveksna***, če za vse $x,y\in A$ in $\lambda\in[0,1]$ velja: $\lambda x+(1-\lambda)y\in A$.

Pokazali smo, da je presek vsake družine konveksnih množic v $\mathbb{R}^n$ konveksen, in da je vsota konveksnih množic $A+B=\{x+y;\ \ x\in A, y\in B\}$ konveksna.

Definicija. Naj bodo $x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{R}^n$ in $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$. Vektor $\sum_{i=1}^k\lambda_i x_i$ je ***konveksna kombinacija*** vektorjev $x_1,\ldots,x_k$, če velja: $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\geq 0$ in $\sum_{i=1}^k\lambda_i=1$.

Pokazali smo, da konveksna množica vsebuje vse konveksne kombinacije svojih elementov.

Pokazali smo, da je vsak *afini podprostor* v $\mathbb{R}^n$ konveksna množica.

Konveksna ovojnica $\mathrm{C}(A)$ poljubne množice $A\subseteq\mathbb{R}^n$ je presek družine vseh konveksnih množic, ki vsebujejo A. Pokazali smo, da je $\mathrm{C}(A)$ najmanjša konveksna množica, ki vsebuje A, in da je enaka množici vseh konveksnih kombinacij elementov množice A.

Vsaka *hiperravnina* in vsak *zaprt polprostor* je konveksna množica. Presek končno mnogo zaprtih polprostorov imenujemo *konveksni polieder*.

Definirali smo *konveksne stožce* v $\mathbb{R}^n$ kot množice, ki hkrati s katerimakoli svojima točkama vsebujejo tudi vse njune nenegativne linearne kombinacije. Množico $S(a_1,a_2,\ldots,a_m)$, kjer so $a_1,a_2,\ldots,a_m$ vektorji v $\mathbb{R}^n$, smo imenovali *konveksni stožec, ki ga razpenjajo* $a_1,a_2,\ldots,a_m$*.* Množici $A\subseteq\mathbb{R}^n$ smo priredili njen *dualni stožec* A^*, ki vsebuje tiste $x\in\mathbb{R}^n$, ki z vsakim elementom množice A tvorijo oster ali pravi kot.

Farkaseva lema v geometrijski obliki (FLg):

$$S(a_1,a_2,\ldots,a_m)^{**}=S(a_1,a_2,\ldots,a_m)$$

Farkaseva lema v algebraični obliki, 1. varianta (FLa1):

$$\exists x\geq 0:\ \ Ax=b \Longleftrightarrow \forall y:(A^Ty\geq 0\Rightarrow\langle b,y\rangle\geq 0).$$

Farkaseva lema v algebraični obliki, 2. varianta (FLa2):

$$\exists x\geq 0:\ \ Ax\leq b \Longleftrightarrow \forall y\geq 0:(A^Ty\geq 0\Rightarrow\langle b,y\rangle\geq 0).$$

Farkasevo lemo *FLa1* lahko uporabimo za dokazovanje nerešljivosti sistema linearnih enačb, *FLa2* pa za dokazovanje nerešljivosti sistema linearnih neenačb.

Definicija. Preslikava $f: A \to \mathbb{R}$, kjer je A konveksna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, je **konveksna funkcija**, če za vse $x, y \in \mathbb{R}$ in $\lambda \in [0,1]$ velja: $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Geometrijsko: zveznica dveh točk na grafu konveksne funkcije leži nad grafom.

Zgledi: Preslikava $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) = x^2$, je konveksna funkcija. Vsaka linearna funkcija, vsaka afina funkcija in vsaka norma je konveksna funkcija.

Lastnosti zaprtosti za operacije:

1. Vsota konveksnih funkcij je konveksna.
2. Produkt konveksne funkcije z nenegativno konstanto je konveksen.
3. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica.

3.a) Če je $g: A \to \mathbb{R}^k$ linearna in $f: g(A) \to \mathbb{R}$ konveksna, je kompozitum $f \circ g: A \to \mathbb{R}$ konveksen.

3.b) Če je $g: A \to \mathbb{R}^k$ konveksna in $f: C(g(A)) \to \mathbb{R}$ nepadajoča konveksna, je kompozitum $f \circ g: A \to \mathbb{R}$ konveksen.

Dokazali smo naslednjo karakterizacijo konveksnih funkcij s pomočjo prvih odvodov:

Naj bo Ω odprta konveksna množica v $\mathbb{R}^n$ in $f: \Omega \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva na Ω. Potem je f konveksna na Ω natanko tedaj, ko za vse $x, y \in \Omega$ velja: $f(x) \geq f(y) + \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$.

Geometrijsko: graf konveksne funkcije leži nad tangentno hiperravnino.

Navedli smo tudi karakterizacijo konveksnih funkcij s pomočjo drugih odvodov:

Naj bo Ω odprta konveksna množica v $\mathbb{R}^n$ in $f: \Omega \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva na Ω. Potem je f konveksna na Ω natanko tedaj, ko je Hessejeva matrika $H_f(x)$ pozitivno semidefinitna za vse $x \in \Omega$.

Ogledali smo si splošno kvadratno funkcijo n spremenljivk $f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$, kjer je A simetrična realna matrika velikosti $n \times n$, b realen n-razsežen vektor in c realno število. Pokazali smo, da je kvadratna funkcija konveksna natanko tedaj, ko je matrika A pozitivno semidefinitna.

Po definiciji in pregledu nekaterih lastnosti konveksnih množic in konveksnih funkcij smo se vrnili k pojmu konveksne optimizacijske naloge. Pokazali smo, da je vsak linearen program konveksna optimizacijska naloga.

Definicija. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f: D \to \mathbb{R}$.

Točka $x \in D$ je *(globalni) minimum* f na D, če $\forall y \in D$: $f(x) \leq f(y)$.

Točka $x \in D$ je *lokalni minimum* f na D, če $\exists \varepsilon > 0 \ \forall y \in D$: $(||x - y|| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.

Dokazali smo ***izrek o lokalni minimizaciji konveksne funkcije***:

Naj bo D *konveksna množica v* $\mathbb{R}^n$ *in* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija. Potem je vsak lokalni minimum* f *na* D *tudi globalni.*

Gornji izrek kaže na pomembnost konveksnosti pri optimizaciji, saj je v splošnem lokalne ekstreme precej laže poiskati kot pa globalne ekstreme.