Lokalna optimizacija

Za težke optimizacijske probleme, kot je npr. problem potujočega trgovca, ne poznamo učinkovitih postopkov reševanja, ki bi bili uspešni tudi pri nalogah z obsežnimi podatki. Zato se v takih primerih zadovoljimo s približnim reševanjem, kjer poiščemo dopustno rešitev, ki je dovolj blizu optimalni.

Ena od splošnih metod približnega reševanja optimizacijskih problemov je *lokalna optimizacija*. Z njo poiščemo *lokalni ekstrem*, torej dopustno rešitev, ki je najboljša v svoji soseščini. Če želimo uporabiti lokalno optimizacijo, si moramo najprej izbrati neko refleksivno in simetrično *relacijo sosednosti* v množici dopustnih rešitev.

Definicija. Naj bo (D, f, opt) optimizacijska naloga in S izbrana relacija sosednosti na D. Za vse $x \in D$ imenujemo množico

$$S(x) = \{ y \in D;\ \ xSy \}$$

soseščina rešitve x.

Dopustna rešitev $x \in D$ je S-*lokalni minimum* f na D, če $\forall y \in S(x):\ \ f(x) \le f(y)$.

Dopustna rešitev $x \in D$ je S-*lokalni maksimum* f na D, če $\forall y \in S(x):\ \ f(x) \ge f(y)$.

Postopek lokalne optimizacije

Podatki: optimizacijska naloga (D, f, opt), relacija sosednosti S na D

Iščemo: S-lokalni ekstrem f na D

a) *Minimizacija*

1. izberi $x \in D$
2. *dokler* $\exists y \in S(x):\ \ f(y) < f(x)$ *ponavljaj* $x = y$
3. vrni x

b) *Maksimizacija*

1. izberi $x \in D$
2. *dokler* $\exists y \in S(x):\ \ f(y) > f(x)$ *ponavljaj* $x = y$
3. vrni x

Trditev. Če se postopek lokalne optimizacije konča, je končna rešitev x S-lokalni ekstrem f na D.

Zgledi relacij sosednosti:

1. Če je $D \subseteq R_n$, za vsak $\varepsilon > 0$ definiramo relacijo sosednosti S_ε takole: $x S_\varepsilon y \Longleftrightarrow \| x - y \| \le \varepsilon$.

2. Pri problemu potujočega trgovca za vsako naravno število $k \geq 2$ definiramo relacijo sosednosti S_k takole: različna Hamiltonova cikla H_1 in H_2 v grafu G sta sosednja, če dobimo H_2 iz H_1 z zamenjavo k izbranih povezav, ki nimajo skupnih krajišč, z drugimi k povezavami.

3. Pri problemu najcenejšega vpetega drevesa definiramo, da sta različni vpeti drevesi T_1 in T_2 v grafu G sosednji glede na relacijo sosednosti S_C, če je $T_2 = T_1 + e - f$, kjer sta $e, f \in V(G)$.

Definicija. Relacija sosednosti S je *natančna* ali *eksaktna* za optimizacijsko nalogo (D, f, opt), če je vsak S-lokalni ekstrem f na D tudi (globalni) ekstrem f na D.
Iz izreka o lokalni minimizaciji konveksne funkcije sledi, da je pri konveksni optimizacijski nalogi relacija sosednosti S_ε natančna za vsak $\varepsilon > 0$.

S protiprimerom smo pokazali, da relacija S_2 za problem potujočega trgovca *ni* natančna.

Povedali smo, da je relacija sosednosti S_C za problem najcenejšega vpetega drevesa natančna.