**Prirejanja, pokritja in pretoki**

Oznaka: če je *A* končna množica, z |*A*| označimo število njenih elementov oziroma njeno *moč*.

Definirali smo *prirejanje* in *pokritje* v grafu. Moč največjega prirejanja v *G* smo označili z *μ*(*G*)*,* moč najmanjšega pokritja v *G* pa s *τ*(*G*). Pokazali smo:

*1. Če je M prirejanje in P pokritje v G, je |M|≤|P|.
2. Za vsak graf G je μ(G)≤τ(G).
3. Če za neko prirejanje M in pokritje P velja |M|=|P|, je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje v G.*

***Problem največjega prirejanja****:*
Dan je neusmerjen graf *G*. Poišči največje prirejanje v *G*!
***Problem najmanjšega pokritja****:*
Dan je neusmerjen graf *G*. Poišči najmanjše pokritje v *G*!
Glede na izbrano prirejanje *M* smo definirali *proste* in *vezane povezave*, *prosta* in *vezana vozlišča*, *izmenične poti* in *povečujoče poti*.
Dokazali smo ***Bergeov izrek***, ki pravi: *Prirejanje M je največje natanko tedaj, ko graf ne vsebuje nobenih povečujočih poti za M*. To nam omogoča poiskati največje prirejanje v grafu *G* z naslednjim postopkom:

1. *M* = poljubno prirejanje v *G*
2. **dokler** v *G* obstaja povečujoča pot *P za M* **ponavljaj**
povečaj prirejanje *M* z zamenjavo prostih in vezanih povezav na *P*
3. **vrni** *M*.

Opisali smo **madžarsko metodo (MM)** za iskanje največjega prirejanja v dvodelnem grafu *G*. Poleg največjega prirejanja v *G* nam ta metoda poišče tudi najmanjše pokritje grafa *G*.

Z uporabo MM smo dokazali ***Koenig-Egervaryjev izrek***, ki pravi:  *V vsakem dvodelnem grafu G je μ(G)=τ(G)*.

Definicija. Prirejanje *M* v grafu *G* je ***popolno***, če so vsa vozlišča *G* vezana v *M*.

Videli smo, da lahko ***Koenigov izrek o plesnih parih*** povemo takole: *Vsak k-regularen dvodelen graf, kjer je k≥1, ima popolno prirejanje.*

Naj bo *G* graf in *J*⊆*V*(*G*). Množico *N*(*J*)={*v*∈*V*(*G*); ∃*u*∈*J*:*uv*∈*E*(*G*)} imenujemo soseščina množice vozlišč *J*. Z uporabo MM smo dokazali ***Hallov izrek***, ki pravi:

*Naj bo G=(X∪Y,E) dvodelen graf z delnima množicama vozlišč X in Y, ki sta enake moči, torej |X|=|Y|. Potem velja: Graf G ima popolno prirejanje ⟺∀J⊆X:|N(J)|≥|J|*.

Ogledali smo si **madžarsko metodo z utežmi (MMU)**za iskanje najcenejšega popolnega prirejanja v uteženem polnem dvodelnem grafu *Kn*,*n.* Ves čas delamo z *matriko cen povezav C*, ki je velikosti *n*×*n*.

Postopek:

1. Od elementov vsake vrstice matrike *C* odštejemo najmanjši element tiste vrstice. Od elementov vsakega stolpca matrike *C* odštejemo najmanjši element tistega stolpca.

2. Če v matriki *C* najdemo *n* ničel, tako da je v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko ena, končamo (najdene ničle določajo najcenejše popolno prirejanje v *G*).

Sicer poiščemo množico vrstic in stolpcev (skupaj manj kot *n*), ki pokrijejo vse ničle v matriki *C*.

3. Naj bo *ε* najmanjši nepokriti element *C*. Vse nepokrite elemente zmanjšamo za *ε*. Vse dvakrat pokrite elemente povečamo za *ε*. Ostale elemente pustimo nespremenjene. Vrnemo se na korak 2.

Pokazali smo, kako izvedemo 2. korak MMU s pomočjo MM na dvodelnih grafih brez uteži. Utemeljili smo pravilnost in končnost MMU.

**Pretoki in prerezi**

Dano je pretočno omrežje, po katerem teče tekočina. Omrežje vsebuje dve odlikovani vozlišči, izvor *s* in ponor *t*, za vsako povezavo pa poznamo zgornjo mejo dopustnega pretoka. Iščemo največji možni pretok iz *s* v *t*.

Podatki za ***problem največjega pretoka***:

1. usmerjen graf *G*=(*V*,*E*) z odlikovanima vozliščema *s* in *t*,
2. nenegativno realno število*cij* za vsako povezavo *ij*∈*E* (prepustnost ali kapaciteta povezave *ij*).

Prepustnost *c* razširimo na vse pare vozlišč takole:

*c*(*i*,*j*)=*cij*, če *ij*∈*E*,

*c*(*i*,*j*)=0, če *ij*∉*E*.

Iščemo največji pretok *f*:*V*×*V*→R, ki zadošča pogojem

1. *f*(*i*,*j*)=−*f*(*j*,*i*)  za vse *i*,*j*∈*V*  (antisimetričnost pretoka),

2. ∑*i*∈*Vf*(*i*,*j*)=0 za vse *j*∈*V*∖{*s*,*t*} (Kirchhoffovi zakoni),

3. *f*(*i*,*j*)≤*c*(*i*,*j*)za vse *i*,*j*∈*V*  (ustreznost pretoka).

Pri tem velikost pretoka *f* definiramo kot

|*f*|=∑*i*∈*Vf*(*i*,*t*).

Prerez omrežja (*G*,*s*,*t*,*c*) definiramo kot par množic *A*,*B*⊆*V*, kjer je

1. *A*∪*B*=*V*, *A*∩*B*=∅,

2. *s*∈*A*, *t*∈*B*.

Prepustnost prereza (*A*,*B*) definiramo kot *c*(*A*,*B*)=∑*i*∈*A*,*j*∈*Bc*(*i*,*j*). Če je *f* pretok v *G*, definiramo tok skozi prerez (*A*,*B*) kot *f*(*A*,*B*)=∑*i*∈*A*,*j*∈*Bf*(*i*,*j*).

**Trditev.** Za vsak pretok *f* in vsak prerez (*A*,*B*) v *G*  je *f*(*A*,*B*)=|*f*|.

Pri **problemu najmanjšega prereza** v omrežju (*G*,*s*,*t*,*c*) iščemo prerez z najmanjšo prepustnostjo.

***Izrek.*** Za vsak pretok *f* in vsak prerez (*A*,*B*) v *G* je *f*(*A*,*B*)≤*c*(*A*,*B*).

Če je *f*(*A*,*B*)=*c*(*A*,*B*), je *f* največji pretok in (*A*,*B*) najmanjši prerez v *G*.

Če je *f* pretok v omrežju (*G*,*s*,*t*,*c*), definiramo residualno omrežje (*Gf*,*s*,*t*,*r*) takole: *r*=*c*−*f*, *V*(*Gf*)=*V*, *E*(*Gf*)={*ij*∈*E*; *r*(*i*,*j*)>0}.

Usmerjeno pot od *s* do *t* v *Gf* imenujemo povečujoča pot.

***Algoritem Forda in Fulkersona:***

Podatki: omrežje (*G*,*s*,*t*,*c*)

Rezultat: največji pretok *f* in najmanjši prerez (*A*,*B*)

Postopek:

1. *f* = poljuben pretok v (*G*,*s*,*t*,*c*)

2. **dokler** v *Gf* obstaja povečujoča pot *P* **ponavljaj**

*d*=min{*r*(*i*,*j*); *ij*∈*E*(*P*)}

*fP*(*i*,*j*)=*d*, če *ij*∈*E*(*P*)
*fP*(*i*,*j*)=−*d*, če *ji*∈*E*(*P*)
*fP*(*i*,*j*)=0, sicer

*f*=*f*+*fP*

3. *A*={*v*∈*V*(*G*); obstaja usmerjena pot *s*→*v* v *Gf*}

4. *B*=*V*(*G*)∖*A*

5. **vrni** *f*,*A*,*B*

***Izrek*** (Ford & Fulkerson). Naj bo *f* pretok v omrežju (*G*,*s*,*t*,*c*). Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. *f* je največji pretok v (*G*,*s*,*t*,*c*),

2. v *Gf* ni povečujočih poti,

3. obstaja prerez (*A*,*B*) v (*G*,*s*,*t*,*c*), tako da je |*f*|=*c*(*A*,*B*).