Prirejanja, pokritja in pretoki

Oznaka: če je A končna množica, z $|A|$ označimo število njenih elementov oziroma njeno *moč*.

Definirali smo *prirejanje* in *pokritje* v grafu. Moč največjega prirejanja v G smo označili z $\mu(G)$, moč najmanjšega pokritja v G pa s $\tau(G)$. Pokazali smo:

1. Če je M prirejanje in P pokritje v G, je $|M| \leq |P|$.
2. Za vsak graf G je $\mu(G) \leq \tau(G)$.
3. Če za neko prirejanje M in pokritje P velja $|M| = |P|$, je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje v G.

***Problem največjega prirejanja**:*
Dan je neusmerjen graf G. Poišči največje prirejanje v G!

***Problem najmanjšega pokritja**:*
Dan je neusmerjen graf G. Poišči najmanjše pokritje v G!

Glede na izbrano prirejanje M smo definirali *proste* in *vezane povezave*, *prosta* in *vezana vozlišča*, *izmenične poti* in *povečujoče poti*.

Dokazali smo ***Bergeov izrek***, ki pravi: *Prirejanje M je največje natanko tedaj, ko graf ne vsebuje nobenih povečujočih poti za M.* To nam omogoča poiskati največje prirejanje v grafu G z naslednjim postopkom:

1. $M =$ poljubno prirejanje v G
2. **dokler** v G obstaja povečujoča pot P *za* M **ponavljaj**
povečaj prirejanje M z zamenjavo prostih in vezanih povezav na P
3. **vrni** M.

Opisali smo **madžarsko metodo (MM)** za iskanje največjega prirejanja v dvodelnem grafu G. Poleg največjega prirejanja v G nam ta metoda poišče tudi najmanjše pokritje grafa G.

Z uporabo MM smo dokazali ***Koenig-Egervaryjev izrek***, ki pravi:
V vsakem dvodelnem grafu G je $\mu(G) = \tau(G)$.

Definicija. Prirejanje M v grafu G je *popolno*, če so vsa vozlišča G vezana v M.

Videli smo, da lahko ***Koenigov izrek o plesnih parih*** povemo takole: *Vsak k-regularen dvodelen graf, kjer je $k \geq 1$, ima popolno prirejanje.*

Naj bo G graf in $J \subseteq V(G)$. Množico $N(J) = \{ v \in V(G);\ \exists u \in J : uv \in E(G) \}$ imenujemo *soseščina* množice vozlišč J. Z uporabo MM smo dokazali ***Hallov izrek***, ki pravi:

Naj bo $G=(X\cup Y,E)$ *dvodelen graf z delnima množicama vozlišč* X *in* Y, *ki sta enake moči, torej* $|X|=|Y|$. *Potem velja: Graf* G *ima popolno prirejanje* $\Longleftrightarrow \forall J\subseteq X: |N(J)|\geq |J|$.

Ogledali smo si **madžarsko metodo z utežmi (MMU)** za iskanje najcenejšega popolnega prirejanja v uteženem polnem dvodelnem grafu $K_{n,n}$. Ves čas delamo z *matriko cen povezav* C, ki je velikosti $n\times n$.

Postopek:

1. Od elementov vsake vrstice matrike C odštejemo najmanjši element tiste vrstice. Od elementov vsakega stolpca matrike C odštejemo najmanjši element tistega stolpca.

2. Če v matriki C najdemo n ničel, tako da je v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko ena, končamo (najdene ničle določajo najcenejše popolno prirejanje v G).

Sicer poiščemo množico vrstic in stolpcev (skupaj manj kot n), ki pokrijejo vse ničle v matriki C.

3. Naj bo ε najmanjši nepokriti element C. Vse nepokrite elemente zmanjšamo za ε. Vse dvakrat pokrite elemente povečamo za ε. Ostale elemente pustimo nespremenjene. Vrnemo se na korak 2.

Pokazali smo, kako izvedemo 2. korak MMU s pomočjo MM na dvodelnih grafih brez uteži. Utemeljili smo pravilnost in končnost MMU.

Pretoki in prerezi

Dano je pretočno omrežje, po katerem teče tekočina. Omrežje vsebuje dve odlikovani vozlišči, *izvor* s in *ponor* t, za vsako povezavo pa poznamo zgornjo mejo dopustnega pretoka. Iščemo največji možni pretok iz s v t.

Podatki za *problem največjega pretoka*:

1. usmerjen graf $G=(V,E)$ z odlikovanima vozliščema s in t,
2. nenegativno realno število c_{ij} za vsako povezavo $ij\in E$ (*prepustnost* ali *kapaciteta* povezave ij).

Prepustnost c razširimo na vse pare vozlišč takole:

$c(i,j)=c_{ij}$, če $ij\in E$,

$c(i,j)=0$, če $ij\notin E$.

Iščemo *največji pretok* $f: V\times V\rightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča pogojem

1. $f(i,j)=-f(j,i)$ za vse $i,j\in V$ (*antisimetričnost pretoka*),
2. $\sum_{i\in V} f(i,j)=0$ za vse $j\in V\setminus\{s,t\}$ (*Kirchhoffovi zakoni*),
3. $f(i,j)\leq c(i,j)$ za vse $i,j\in V$ (*ustreznost pretoka*).

Pri tem *velikost* pretoka f definiramo kot

$|f| = \sum_{i \in V} f(i,t)$.

Prerez omrežja (G,s,t,c) definiramo kot par množic $A,B \subseteq V$, kjer je

1. $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$,
2. $s \in A$, $t \in B$.

Prepustnost prereza (A,B) definiramo kot $c(A,B) = \sum_{i \in A, j \in B} c(i,j)$. Če je f pretok v G, definiramo *tok skozi prerez* (A,B) kot $f(A,B) = \sum_{i \in A, j \in B} f(i,j)$.

Trditev. Za vsak pretok f in vsak prerez (A,B) v G je $f(A,B) = |f|$.

Pri ***problemu najmanjšega prereza*** v omrežju (G,s,t,c) iščemo prerez z najmanjšo prepustnostjo.

Izrek. Za vsak pretok f in vsak prerez (A,B) v G je $f(A,B) \le c(A,B)$.

Če je $f(A,B) = c(A,B)$, je f največji pretok in (A,B) najmanjši prerez v G.

Če je f pretok v omrežju (G,s,t,c), definiramo *residualno omrežje* (G_f,s,t,r) takole:
$r = c - f$, $V(G_f) = V$, $E(G_f) = \{ij \in E;\ \ r(i,j) > 0\}$.

Usmerjeno pot od s do t v G_f imenujemo *povečujoča pot*.

Algoritem Forda in Fulkersona:

Podatki: omrežje (G,s,t,c)

Rezultat: največji pretok f in najmanjši prerez (A,B)

Postopek:

1. $f =$ poljuben pretok v (G,s,t,c)
2. **dokler** v G_f obstaja povečujoča pot P **ponavljaj**

$d = \mathrm{min}\{r(i,j);\ \ ij \in E(P)\}$

$f_P(i,j) = d$, če $ij \in E(P)$
$f_P(i,j) = -d$, če $ji \in E(P)$
$f_P(i,j) = 0$, sicer

$f = f + f_P$

3. $A = \{v \in V(G);\ \mathrm{obstaja\ usmerjena\ pot}\ s \rightarrow v\ \mathrm{v}\ G_f\}$
4. $B = V(G) \setminus A$
5. vrni f, A, B

Izrek (Ford & Fulkerson). Naj bo f pretok v omrežju (G,s,t,c). Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. f je največji pretok v (G,s,t,c),

2. v G_f ni povečujočih poti,

3. obstaja prerez (A,B) v (G,s,t,c), tako da je $|f| = c(A,B)$.