**Problem razvoza (PR)**

Dano je transportno omrežje, po katerem prevažamo določeno dobrino. V nekaterih krajih to dobrino izdelujejo oziroma pridobivajo, v drugih pa jo porabljajo. Predpostavljamo, da je skupna ponudba enaka skupnemu povpraševanju. Zanima nas, kako zadostiti povpraševanju z minimalnimi prevoznimi stroški.

*Podatki PR:*

1. usmerjen graf *G*=(*V*,*E*),
2. realno število *bv* za vsako vozlišče *v*∈*V* (povpraševanje v vozlišču *v*, če je *bv*>0, oziroma ponudba, če je *bv*<0),
3. realno število *ce* za vsako povezavo *e*∈*E* (stroški prevoza enote tovora vzdolž povezave *e*).

Predpostavka o podatkih: vsota *bv* po vseh vozliščih *v*∈*V* je enaka 0 (skupna ponudba je enaka skupnemu povpraševanju).

*Iščemo:* za vsako povezavo *e*∈*E* **razvoz** *xe*, ki zadošča pogojem

1. *xe*≥0 za vse *e*∈*E* *(nenegativnost)*,
2. za vsako vozlišče *v*∈*V* velja:

∑*e*∈*E*: *konec*(*e*)=*vxe*− ∑*e*∈*E*: *za*č*etek*(*e*)=*vxe*=*bv* *(Kirchhoffovi zakoni)*,in prikaterem je dosežen min∑*e*∈*Ecexe*.

Problem razvoza smo zapisali v **matrični obliki**:

*Iščemo:* min⟨*c*,*x*⟩
*pri pogojih*  *Ax*=*b*, *x*≥0,

kjer je *A* incidenčna matrika usmerjenega grafa *G*, *b* pa vektor z ničelno vsoto komponent. To je poseben primer LP v splošni obliki.

PR lahko rešujemo s **simpleksno metodo na omrežjih**.

***Definicija:*** Dopustna rešitev *x* je *drevesna dopustna rešitev (ddr)*, če v grafu *G* obstaja vpeto drevo *T*, tako da je razvoz *x* na vseh povezavah zunaj drevesa *T* enak 0.

Denimo, da je *x* dopustna drevesna rešitev, ki ustreza drevesu *T*. Izboljšati jo skušamo takole:

1. V vozliščih 1,2,…,*n* določimo cene prevoza *y*1,*y*2,…,*yn* iz sistema enačb:

*y*1=0,
*yi*+*cij*=*yj*, za vse povezave *ij* drevesa *T*.

2. Vstopajočo povezavo *e* izberemo med tistimi povezavami *ij* zunaj drevesa *T*, za katere je *yi*+*cij*<*yj*.

3. Graf *T*+*e* vsebuje natanko en cikel *C*. Povezave cikla *C* delimo na preme (ki določajo isto orientacijo cikla *C* kot *e*) in obratne (ki določajo nasprotno orientacijo cikla *C* kot *e*). Naj bo

*t*=min{*xuv*; *uv* obratna povezava na *C*}.

Izstopajočo povezavo *f* izberemo med tistimi obratnimi povezavami *uv*, pri katerih je dosežen zgornji minimum.

4. Razvoz na premih povezavah povečamo za *t*, na obratnih pa zmanjšamo za *t*. Drevo *T* nadomestimo z drevesom *T*+*e*−*f* in se vrnemo na korak 1.

To ponavljamo, dokler na 2. koraku ne moremo več izbrati izstopajoče povezave, ker za vse povezave *ij* zunaj drevesa *T* velja *yi*+*cij*≥*yj*.

***Trditev.*** Na vsakem koraku simpleksne metode na omrežju za ddr *x* in za vektor cen *y*, ki pripadata istemu vpetemu drevesu *T*, velja: ⟨*c*,*x*⟩=⟨*b*,*y*⟩.

***Posledica:*** Če za vse povezave *ij* grafa *G* velja neenačba *yi*+*cij*≥*yj,* je trenutna drevesna dopustna rešitev optimalna.

Z drugimi besedami: Če ne moremo izbrati vstopajoče povezave, je trenutna ddr optimalna.

**Preostali problemi** pri reševanju PR:

1. Kaj če ne moremo izbrati izstopajoče povezave, ker na ciklu *C* v grafu *T*+*e* ni nobene obratne povezave? V tem primeru ima omrežje *G* usmerjen cikel z negativno vsoto prevoznih stroškov, torej je PR ***neomejen***.

2. Ogledali smo si ***Cunninghamovo pravilo***, ki nam zagotavlja, da simpleksni postopek na omrežju ne bo zašel v neskončno zanko.

3. Z*ačetno drevesno dopustno rešitev* poiščemo z ***dvofazno simpleksno metodo na omrežju***. V I. fazi izberemo poljubno vozlišče *r* (*koren*) in dodamo umetne povezave: za vsako vozlišče *j* z *bj*≥0 dodamo povezavo *rj* (če je še ni); za vsako vozlišče *j z bj*<0 dodamo povezavo *jr* (če je še ni). Na novem omrežju rešimo pomožni PR, kjer stroške prevoza na povezavah definiramo takole:

*dij*=1, če *ij* umetna povezava,
*dij*=0, če *ij* prvotna povezava.

Za začetno drevesno dopustno rešitev pomožnega problema vzamemo tisto, ki ustreza zvezdi s središčem v korenu *r*. Pomožni problem je gotovo omejen, ker so vsi stroški *dij*≥0*.* Rešimo ga s simpleksno metodo na omrežjih in dobimo rešitev *x*∗, ki ustreza drevesu *T*∗. Tu lahko nastopijo trije primeri:

a) *T*∗ ne vsebuje umetnih povezav. V tem primeru *T*∗ določa iskano *začetno drevesno dopustno rešitev* prvotnega PR, ki ga v II. fazi rešimo z osnovno simpleksno metodo na omrežjih.

b) *T*∗ vsebuje umetno povezavo *ij*, na kateri je *x*∗*ij*>0. V tem primeru je prvotni PR *nedopusten*.

c) *T*∗ vsebuje umetne povezave, vendar je *x*∗*ij*=0 na vseh umetnih povezavah *ij.* V tem primeru omrežje razpade na dve manjši neodvisni podomrežji. Rešitev PR dobimo tako, da ga rešimo ločeno na vsakem od obeh podomrežij.

S tem je predstavitev simpleksne metode na omrežju končana.

Zapisali smo **dual problema razvoza**. Ugotovili smo, da pri reševanju problema razvoza Π s simpleksno metodo na omrežju zadnji vektor cen *y* predstavlja optimalno rešitev dualnega problema Π′.

Dokazali smo, da za problem razvoza, ki je zelo poseben primer linearnega programa, velja ***izrek o celih rešitvah***: *Naj bodo vse komponente vektorja povpraševanja b cela števila. Če ima problem razvoza dopustno rešitev, nam dvofazna simpleksna metoda na omrežju vrne celoštevilsko dopustno rešitev; in če problem ima optimalno rešitev, nam dvofazna simpleksna metoda na omrežju vrne celoštevilsko optimalno rešitev.*

Kot zgled uporabe izreka o celih rešitvah smo dokazali ***Königov izrek o plesnih parih:*** *Na plesu je n fantov in n deklet. Če vsako dekle pozna k od prisotnih fantov, vsak fant pa k od prisotnih deklet in je 1≤k≤n, je mogoče oblikovati n plesnih parov tako, da vsaka plesalka pozna svojega soplesalca in obratno.*