Problem razvoza (PR)

Dano je transportno omrežje, po katerem prevažamo določeno dobrino. V nekaterih krajih to dobrino izdelujejo oziroma pridobivajo, v drugih pa jo porabljajo. Predpostavljamo, da je skupna ponudba enaka skupnemu povpraševanju. Zanima nas, kako zadostiti povpraševanju z minimalnimi prevoznimi stroški.

Podatki PR:

1. usmerjen graf $G=(V,E)$,
2. realno število b_v za vsako vozlišče $v\in V$ (povpraševanje v vozlišču v, če je $b_v>0$, oziroma ponudba, če je $b_v<0$),
3. realno število c_e za vsako povezavo $e\in E$ (stroški prevoza enote tovora vzdolž povezave e).

Predpostavka o podatkih: vsota b_v po vseh vozliščih $v\in V$ je enaka 0 (skupna ponudba je enaka skupnemu povpraševanju).

Iščemo: za vsako povezavo $e\in E$ **razvoz** x_e, ki zadošča pogojem

1. $x_e\geq 0$ za vse $e\in E$ *(nenegativnost)*,
2. za vsako vozlišče $v\in V$ velja:

$\sum_{e\in E:\ konec(e)=v} x_e - \sum_{e\in E:\ za\ etek(e)=v} x_e = b_v$ *(Kirchhoffovi zakoni)*,

in pri katerem je dosežen $\min \sum_{e\in E} c_e x_e$.

Problem razvoza smo zapisali v **matrični obliki**:

Iščemo: $\min\langle c,x\rangle$
pri pogojih $Ax=b,\ x\geq 0$,

kjer je A incidenčna matrika usmerjenega grafa G, b pa vektor z ničelno vsoto komponent. To je poseben primer LP v splošni obliki.

PR lahko rešujemo s **simpleksno metodo na omrežjih**.

Definicija: Dopustna rešitev x je *drevesna dopustna rešitev (ddr)*, če v grafu G obstaja vpeto drevo T, tako da je razvoz x na vseh povezavah zunaj drevesa T enak 0.

Denimo, da je x dopustna drevesna rešitev, ki ustreza drevesu T. Izboljšati jo skušamo takole:

1. V vozliščih $1,2,\ldots,n$ določimo cene prevoza $y_1,y_2,\ldots,y_n$ iz sistema enačb:

$y_1=0$,
$y_i+c_{ij}=y_j$, za vse povezave ij drevesa T.

2. Vstopajočo povezavo e izberemo med tistimi povezavami ij zunaj drevesa T, za katere je $y_i+c_{ij}<y_j$.

3. Graf $T+e$ vsebuje natanko en cikel C. Povezave cikla C delimo na preme (ki določajo isto orientacijo cikla C kot e) in obratne (ki določajo nasprotno orientacijo cikla C kot e). Naj bo

$$t=\min\{x_{uv};\ uv \text{ obratna povezava na } C\}.$$

Izstopajočo povezavo f izberemo med tistimi obratnimi povezavami uv, pri katerih je dosežen zgornji minimum.

4. Razvoz na premih povezavah povečamo za t, na obratnih pa zmanjšamo za t. Drevo T nadomestimo z drevesom $T+e-f$ in se vrnemo na korak 1.
To ponavljamo, dokler na 2. koraku ne moremo več izbrati izstopajoče povezave, ker za vse povezave ij zunaj drevesa T velja $y_i+c_{ij}\geq y_j$.

Trditev. Na vsakem koraku simpleksne metode na omrežju za ddr x in za vektor cen y, ki pripadata istemu vpetemu drevesu T, velja: $\langle c,x\rangle=\langle b,y\rangle$.

Posledica: Če za vse povezave ij grafa G velja neenačba $y_i+c_{ij}\geq y_j$, je trenutna drevesna dopustna rešitev optimalna.

Z drugimi besedami: Če ne moremo izbrati vstopajoče povezave, je trenutna ddr optimalna.

Preostali problemi pri reševanju PR:

1. Kaj če ne moremo izbrati izstopajoče povezave, ker na ciklu C v grafu $T+e$ ni nobene obratne povezave? V tem primeru ima omrežje G usmerjen cikel z negativno vsoto prevoznih stroškov, torej je PR ***neomejen***.

2. Ogledali smo si ***Cunninghamovo pravilo***, ki nam zagotavlja, da simpleksni postopek na omrežju ne bo zašel v neskončno zanko.

3. *Začetno drevesno dopustno rešitev* poiščemo z ***dvofazno simpleksno metodo na omrežju***. V I. fazi izberemo poljubno vozlišče r (*koren*) in dodamo umetne povezave: za vsako vozlišče j z $b_j\geq 0$ dodamo povezavo rj (če je še ni); za vsako vozlišče j z $b_j<0$ dodamo povezavo jr (če je še ni). Na novem omrežju rešimo pomožni PR, kjer stroške prevoza na povezavah definiramo takole:

$d_{ij}=1$, če ij umetna povezava,

$d_{ij}=0$, če ij prvotna povezava.

Za začetno drevesno dopustno rešitev pomožnega problema vzamemo tisto, ki ustreza zvezdi s središčem v korenu r. Pomožni problem je gotovo omejen, ker so vsi stroški $d_{ij}\geq 0$. Rešimo ga s simpleksno metodo na omrežjih in dobimo rešitev x_*, ki ustreza drevesu T_*. Tu lahko nastopijo trije primeri:

a) T_* ne vsebuje umetnih povezav. V tem primeru T_* določa iskano *začetno drevesno dopustno rešitev* prvotnega PR, ki ga v II. fazi rešimo z osnovno simpleksno metodo na omrežjih.

b) T_* vsebuje umetno povezavo ij, na kateri je $x_{*ij}>0$. V tem primeru je prvotni PR *nedopusten*.

c) T_* vsebuje umetne povezave, vendar je $x_{*ij}=0$ na vseh umetnih povezavah ij. V tem primeru omrežje razpade na dve manjši neodvisni podomrežji. Rešitev PR dobimo tako, da ga rešimo ločeno na vsakem od obeh podomrežij.

S tem je predstavitev simpleksne metode na omrežju končana.

Zapisali smo **dual problema razvoza**. Ugotovili smo, da pri reševanju problema razvoza Π s simpleksno metodo na omrežju zadnji vektor cen y predstavlja optimalno rešitev dualnega problema Π' .

Dokazali smo, da za problem razvoza, ki je zelo poseben primer linearnega programa, velja ***izrek o celih rešitvah***: *Naj bodo vse komponente vektorja povpraševanja b cela števila. Če ima problem razvoza dopustno rešitev, nam dvofazna simpleksna metoda na omrežju vrne celoštevilsko dopustno rešitev; in če problem ima optimalno rešitev, nam dvofazna simpleksna metoda na omrežju vrne celoštevilsko optimalno rešitev.*

Kot zgled uporabe izreka o celih rešitvah smo dokazali *Königov izrek o plesnih parih: Na plesu je n fantov in n deklet. Če vsako dekle pozna k od prisotnih fantov, vsak fant pa k od prisotnih deklet in je $1\leq k\leq n$, je mogoče oblikovati n plesnih parov tako, da vsaka plesalka pozna svojega soplesalca in obratno.*