**Optimizacijske naloge in problemi**

Ogledali smo si tri zglede optimizacijskih nalog oz. problemov:

1. nalogo o svetilki,
2. problem prirejanja opravil,
3. proizvodni problem.

Za vsakega od njih smo izbrali primeren *matematični model* in ugotovili, da gre za posebne primere znanih optimizacijskih problemov. Ti problemi so:

1. *problem najkrajše poti,*
2. *problem najcenejšega popolnega prirejanja v grafu Kn,n,*
3. *linearni program.*

Formalno smo definirali ***optimizacijsko nalogo*** kot urejeno trojico (*D*,*f*,*opt*)*,* kjer je *D* množica *dopustnih rešitev*, *f*:*D*→R *ciljna (namenska, kriterijska) funkcija* in *opt* vrsta ekstrema, ki ga iščemo (*opt*∈{min,max}).
Gornje tri probleme oz. naloge smo formulirali v obliki (*D*,*f*,*opt*).

Ugotovili smo, da lahko vsako maksimizacijsko nalogo preprosto prevedemo na neko minimizacijsko nalogo in tudi obratno, saj velja:

max{*f*(*x*); *x*∈*D*} = −min{−*f*(*x*); *x*∈*D*},

min{*f*(*x*); *x*∈*D*} = −max{−*f*(*x*); *x*∈*D*}.

**Oznake.** Za optimizacijsko nalogo Π=(*D*,*f*,*opt*) označimo:

1. *v*∗(Π)=*opt*{*f*(*x*); *x*∈*D*} (*optimalna vrednost* naloge),
2. *D*(Π)=*D* (množica *dopustnih rešitev* naloge),
3. *Opt*(Π)={*x*∗∈*D*(Π); *f*(*x*∗)=*v*∗(Π)} (množica *optimalnih rešitev* naloge).

**Definicija.** Optimizacijska naloga (*D*,*f*,*opt*) je:

* *dopustna*, če ima vsaj eno dopustno rešitev,
* *nedopustna*, če nima nobene dopustne rešitve (tj. če *D*=∅).

**Definicija.** Dopustna optimizacijska naloga (*D*,*f*,*opt*) je:

* *omejena*, če iščemo maksimum in je ciljna funkcija *f* na *D* navzgor omejena, ali če iščemo minimum in je ciljna funkcija *f* na *D* navzdol omejena;
* *neomejena*, sicer.

Ugotovili smo, da je glede na obstoj rešitev vsaka optimizacijska naloga Π enega od naslednjih štirih tipov:

1. *nedopustna* (če je množica *D*(Π) prazna),
2. *neomejena*,
3. dopustna in omejena, a *nima nobene optimalne rešitve*,
4. *ima vsaj eno optimalno rešitev* (tj. množica *Opt*(Π) ni prazna).

Ogledali smo si primere optimizacijskih nalog vseh štirih tipov.

**Trditev.** Naj bo Π=(*D*,*f*,*opt*) optimizacijska naloga.

1. Če je množica dopustnih rešitev *D* neprazna in končna, ima naloga Π vsaj eno optimalno rešitev.
2. Če je množica dopustnih rešitev *D* neprazna, zaprta in omejena podmnožica evklidskega prostora R*n* in je namenska funkcija *f*:*D*→R zvezna, ima naloga Π vsaj eno optimalno rešitev.