Optimizacijske naloge in problemi

Ogledali smo si tri zglede optimizacijskih nalog oz. problemov:

1. nalogo o svetilki,
2. problem prirejanja opravil,
3. proizvodni problem.

Za vsakega od njih smo izbrali primeren *matematični model* in ugotovili, da gre za posebne primere znanih optimizacijskih problemov. Ti problemi so:

1. *problem najkrajše poti,*
2. *problem najcenejšega popolnega prirejanja v grafu $K_{n,n}$,*
3. *linearni program.*

Formalno smo definirali ***optimizacijsko nalogo*** kot urejeno trojico (D,f,opt), kjer je D množica *dopustnih rešitev*, $f:D\to\mathbb{R}$ *ciljna (namenska, kriterijska) funkcija* in opt vrsta ekstrema, ki ga iščemo ($opt\in\{\min,\max\}$).

Gornje tri probleme oz. naloge smo formulirali v obliki (D,f,opt).

Ugotovili smo, da lahko vsako maksimizacijsko nalogo preprosto prevedemo na neko minimizacijsko nalogo in tudi obratno, saj velja:

$$\max\{f(x);\ x\in D\} = -\min\{-f(x);\ x\in D\},$$
$$\min\{f(x);\ x\in D\} = -\max\{-f(x);\ x\in D\}.$$

Oznake. Za optimizacijsko nalogo $\Pi=(D,f,opt)$ označimo:

1. $v_*(\Pi)=opt\{f(x);\ x\in D\}$ (*optimalna vrednost* naloge),
2. $D(\Pi)=D$ (množica *dopustnih rešitev* naloge),
3. $Opt(\Pi)=\{x_*\in D(\Pi);\ f(x_*)=v_*(\Pi)\}$ (množica *optimalnih rešitev* naloge).

Definicija. Optimizacijska naloga (D,f,opt) je:

- *dopustna*, če ima vsaj eno dopustno rešitev,
- *nedopustna*, če nima nobene dopustne rešitve (tj. če $D=\emptyset$).

Definicija. Dopustna optimizacijska naloga (D,f,opt) je:

- *omejena*, če iščemo maksimum in je ciljna funkcija f na D navzgor omejena, ali če iščemo minimum in je ciljna funkcija f na D navzdol omejena;
- *neomejena*, sicer.

Ugotovili smo, da je glede na obstoj rešitev vsaka optimizacijska naloga Π enega od naslednjih štirih tipov:

1. *nedopustna* (če je množica $D(\Pi)$ prazna),
2. *neomejena*,
3. dopustna in omejena, a *nima nobene optimalne rešitve*,
4. *ima vsaj eno optimalno rešitev* (tj. množica $Opt(\Pi)$ ni prazna).

Ogledali smo si primere optimizacijskih nalog vseh štirih tipov.

Trditev. Naj bo $\Pi=(D,f,opt)$ optimizacijska naloga.

1. Če je množica dopustnih rešitev D neprazna in končna, ima naloga Π vsaj eno optimalno rešitev.
2. Če je množica dopustnih rešitev D neprazna, zaprta in omejena podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in je namenska funkcija $f\colon D\to\mathbb{R}$ zvezna, ima naloga Π vsaj eno optimalno rešitev.