**Vezani ekstremi z neenačbami**

***Problem vezanega ekstrema z neenačbami (VEN):***Naj bo Ω odprta množica v R*n* in *f*, *g*1, *g*2,…, *gm*:Ω→R  zvezno odvedljive na Ω.

Iščemo min{*f*(*x*);*x*∈*D*},

kjer je *D*={*x*∈Ω; *gi*(*x*)≤0  za  *i*=1,2,…,*m*}.

Ta problem je posplošitev iz Analize znanega problema *vezanih ekstremov*, kjer so vezi podane v obliki enačb *gi*(*x*)=0. Vsako takšno enačbo lahko namreč enakovredno nadomestimo z neenačbama  *gi*(*x*)≤0,   −*gi*(*x*)≤0.

***Definicija****.* Točka *x*∗∈Ω *zadošča* ***pogojem Karusha, Kuhna in Tuckerja*** *(****KKT****),* če ***obstajajo skalarji***  *λ*1,*λ*2,…,*λm*≥0 (*Lagrangeevi množitelji*),  tako da je

**(KKT 1)**  ∇(*f*+*λ*1*g*1+*λ*2*g*2+…+ *λmgm*)(*x*∗)=0,
**(KKT 2)**  *λigi*(*x*∗)=0  za  *i*=1,2,…,*m*,
**(KKT 3)**  *gi*(*x*∗)≤0  za  *i*=1,2,…,*m*.

***1. vprašanje*** *(zadostnost pogojev KKT za optimalnost)*: Pri kakšnih dodatnih pogojih za funkcije *f*,*g*1,*g*2,…,*gm* velja: Če *x*∗∈Ω zadošča pogojem KKT, je *x*∗ optimalna rešitev problema VEN?

***Izrek (zadostnost pogojev KKT za optimalnost)****.* *Naj bo* Ω *odprta konveksna množica v* R*n* *in f*,*g*1,*g*2,…,*gm*:Ω→R *zvezno odvedljive in konveksne na* Ω*. Če x*∗∈Ω *zadošča pogojem KKT, ima f v točki x*∗ *globalni minimum na D.*Za zgled smo poiskali minimum funkcije  *f*(*x*,*y*)=1*x*+2*y*pri pogojih *x*>0,*y*>0,*x*+*y*≤5,3*x*2+2*y*2≤35*.*
***2. vprašanje*** *(potrebnost pogojev KKT za optimalnost):* Pri kakšnih dodatnih pogojih za funkcije *f*,*g*1,*g*2,…,*gm* velja: Če je *x*∗∈Ω optimalna rešitev problema VEN, *x*∗ zadošča pogojem KKT?

***Definicija***. Vektor *d*∈R*n* je *dopustna smer* v točki *x*∈*D*, če obstaja *ε*>0, tako da je *x*+*td*∈*D* za vse *t*∈[0,*ε*). Množico vseh dopustnih smeri v točki *x* označimo z *S*(*x*).

***Pripomba***: Če je *x* notranja točka območja *D*, je *S*(*x*)=R*n*.

***Definicija***. Točka *x*∈*D* je *kritična točka* funkcije *f* na *D*, če za vse *d*∈*S*(*x*) velja: ⟨*d*,∇*f*(*x*)⟩≥0.

***Pripomba***: Če je *x* notranja točka območja *D*, je pogoj "⟨*d*,∇*f*(*x*)⟩≥0 za vse *d*∈*S*(*x*)" enakovreden pogoju "∇*f*(*x*)=0". V tem primeru pojem kritične točke sovpada s pojmom stacionarne točke.

***Lema***. *Če ima f v točki x∗∈D lokalni minimum na D, je x∗ kritična točka f na D.*

***Izrek o kritičnih točkah odvedljive konveksne funkcije***. *Naj bo* Ω⊆R*n odprta množica, D*⊆Ω *konveksna množica in f*:Ω→R *odvedljiva konveksna funkcija. Potem ima f v točki x*∗∈*D globalni minimum na D natanko tedaj, ko je x*∗ *kritična točka f na D.*

***Oznake***. Za *x*∈*D* označimo z *V*(*x*)={*i*∈{1,…,*m*}; *gi*(*x*)=0} množico indeksov *aktivnih vezi* v točki *x.* Označimo še *T*(*x*)={*d*∈R*n*; ∀*i*∈*V*(*x*): ⟨*d*,∇*g*(*x*)⟩≤0}.

***Trditev****.* Za vse *x*∈*D* je zaprtje množice *S*(*x*) vsebovano v množici *T*(*x*).

***Definicija****.* Vezi *g*1,*g*2,…,*gm* so *regularne* v točki *x*∈*D*, če je zaprtje množice *S*(*x*) enako množici *T*(*x*).

***Izrek (potrebnost pogojev KKT za optimalnost).*** *Če ima f v točki x*∗∈*D lokalni minimum na D in so vezi v tej točki regularne, točka x*∗ *zadošča pogojem KKT.*

Navedli smo nekaj zadostnih pogojev za regularnost vezi:

a) Če so vezi *linearne, so regularne povsod na* *D*.
b) Če je problem VEN konveksen in ima množica *D* neprazno notranjost*, so vezi regularne povsod na* *D*.
c) Če so gradienti vezi *linearno neodvisni v točki x*∈*D, so vezi regularne v* *x*.

### *Fisherjev model trga*

Kot zanimiv in netrivialen primer uporabe teorije KKT smo opisali **Fisherjev model trga**, kjer iščemo ravnovesne cene *p* in optimalno razdelitev dobrin *x* med kupce, pri čemer zahtevamo, da kupci porabijo ves svoj denar, da so vse dobrine razprodane in da je zadovoljstvo vsakega kupca z razdelitvijo dobrin *x* glede na cene *p* maksimalno.

***Podatki:***  *m*= število kupcev, *n*= število dobrin

*ai*>0 ...... kapital kupca *i*  (za *i*=1,…,*m*)

*bj*>0 ...... količina dobrine *j* na trgu  (za *j*=1,…,*n*)

*uij*≥0 .... zadovoljstvo kupca *i* z nakupom enote dobrine *j*  (za *i*=1,…,*m*, *j*=1,…,*n*)

***Iščemo:***

*pj*>0 ...... ceno dobrine *j* (za *j*=1,…,*n*)

*xij*≥0 ..... količino dobrine *j*, ki jo kupi kupec *i* (za *i*=1,…,*m*,*j*=1,…,*n*)

***pri pogojih***

(1) ∑*nj*=1*pjxij*=*ai* (za *i*=1,…,*m*):  vsak kupec porabi ves svoj kapital,
(2) ∑*mi*=1 *xij*=*bj* (za *j*=1,…,*n*):  vsaka dobrina je razprodana,
(3) za vsakega kupca *i*=1,…,*m* je njegovo skupno zadovoljstvo z nakupom

*ui*(*x*):=∑*nj*=1*uijxij*

pri cenah *p* največje med vsemi rešitvami *x* sistema enačb (1) in (2).

***Definicija.*** Cene *p* so *ravnovesne*, če obstaja razdelitev dobrin *x*, ki zadošča pogojem (1), (2), (3). Pripadajočo razdelitev dobrin imenujemo *optimalna razdelitev.*

Pri reševanju Fisherjevega modela trga želimo hkrati maksimizirati *m* funkcij *ui*(*x*) (*i*=1,…,*m*), česar ne znamo storiti neposredno. Zato za namensko funkcijo vzamemo geometrično sredino funkcij *ui*(*x*)*,* uteženih s kapitalom *ai.* Poenostavimo jo z logaritmiranjem in množenjem s konstanto *a*1+⋯+*am*>0. Dodatno privzamemo:

1. za vsak *i* obstaja *j*, tako da je *uij*>0 (ni povsem nezadovoljnega kupca),
2. za vsak *j* obstaja *i*, tako da je *uij*>0 (ni povsem nezaželene dobrine),
3. *bj*=1 (*j*=1,…,*n*): za mersko enoto dobrine *j* vzamemo kar količino te dobrine na trgu.

Zdaj definiramo pripadajoči ***Eisenberg-Galeov konveksni program (EGP)*** takole:

***Iščemo***   min{*f*(*x*); *x*∈*D*},

kjer je *f*:Ω→R,   *f*(*x*)=−∑*mi*=1*ai*ln*ui*(*x*),  *ui*(*x*)=∑*nj*=1*uijxij* za *i*=1,…,*m*,

Ω={*x*∈R*mn*; *ui*(*x*)>0  za  *i*=1,…,*m*}*,
D*={*x*∈Ω; ∑*mi*=1*xij*≤1 (*j*=1,…,*n*),*xij*≥0 (*i*=1,…,*m*,*j*=1,…,*n*)}.

Pokazali smo:

***Trditev.*** *Fisherjevemu modelu pripadajoči EGP ima optimalno rešitev.*

Videli smo, da je EGP konveksen problem VEN z linearnimi vezmi, torej je vektor *x* optimalna rešitev EGP natanko tedaj, ko zadošča pogojem KKT.

***Izrek.*** *Razdelitev dobrin x v Fisherjevem modelu trga je optimalna natanko tedaj, ko je x optimalna rešitev pripadajočega EGP.*

Optimalno razdelitev dobrin v Fisherjevem modelu trga lahko torej poiščemo tako, da rešimo pogoje KKT pripadajočega EGP z Lagrangeevimi množitelji *pj*≥0   (*j*=1,…,*n*) in *λij*≥0   (*i*=1,…,*m*, *j*=1,…,*n*):

(KKT1)  *pj*=*aiuij*∑*nj*=1*uijxij*+*λij*   (*i*=1,…,*m*, *j*=1,…,*n*)

(KKT2a)  *pj*(∑*mi*=1*xij*−1)=0   (*j*=1,…,*n*)

(KKT2b)  *λijxij*=0   (*i*=1,…,*m*, *j*=1,…,*n*)

(KKT3a)  ∑*mi*=1*xij*≤1   (*j*=1,…,*n*)

(KKT3b)  *xij*≥0   (*i*=1,…,*m*, *j*=1,…,*n*)

To je sistem enačb in neenačb z 2*mn*+*n* neznankami *pj*, *λij*, *xij*. Pri dokazu gornjega izreka smo videli, da so Lagrangeevi množitelji prve skupine vezi, *pj*, ravno iskane ravnovesne cene dobrin v Fisherjevem modelu trga.