Vezani ekstremi z neenačbami

Problem vezanega ekstrema z neenačbami (VEN): Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{R}^n$ in $f,\ g_1,\ g_2,\ldots,\ g_m:\Omega\to\mathbb{R}$ zvezno odvedljive na Ω.

Iščemo $\min\{f(x);x\in D\}$,

kjer je $D=\{x\in\Omega;\ g_i(x)\le 0\ \text{ za }\ i=1,2,\ldots,m\}$.

Ta problem je posplošitev iz Analize znanega problema *vezanih ekstremov*, kjer so vezi podane v obliki enačb $g_i(x)=0$. Vsako takšno enačbo lahko namreč enakovredno nadomestimo z neenačbama $g_i(x)\le 0,\ \ -g_i(x)\le 0$.

Definicija. Točka $x_*\in\Omega$ *zadošča* ***pogojem Karusha, Kuhna in Tuckerja (KKT)***, če ***obstajajo skalarji*** $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\ge 0$ (*Lagrangeevi množitelji*), tako da je

(KKT 1)
$(f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\ldots+\ \lambda_m g_m)(x_*)=0$,
(KKT 2) $\lambda_i g_i(x_*)=0$ za $i=1,2,\ldots,m$,
(KKT 3) $g_i(x_*)\le 0$ za $i=1,2,\ldots,m$.

1. vprašanje *(zadostnost pogojev KKT za optimalnost)*: Pri kakšnih dodatnih pogojih za funkcije $f,g_1,g_2,\ldots,g_m$ velja: Če $x_*\in\Omega$ zadošča pogojem KKT, je x_* optimalna rešitev problema VEN?

Izrek (zadostnost pogojev KKT za optimalnost). *Naj bo Ω odprta konveksna množica v $\mathbb{R}^n$ in $f,g_1,g_2,\ldots,g_m:\Omega\to\mathbb{R}$ zvezno odvedljive in konveksne na Ω. Če $x_*\in\Omega$ zadošča pogojem KKT, ima f v točki x_* globalni minimum na D.*

Za zgled smo poiskali minimum funkcije
$f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$
pri pogojih $x>0,y>0,x+y\le 5,3x^2+2y^2\le 35$.

2. vprašanje *(potrebnost pogojev KKT za optimalnost):* Pri kakšnih dodatnih pogojih za funkcije $f,g_1,g_2,\ldots,g_m$ velja: Če je $x_*\in\Omega$ optimalna rešitev problema VEN, x_* zadošča pogojem KKT?

Definicija. Vektor $d\in\mathbb{R}^n$ je *dopustna smer* v točki $x\in D$, če obstaja $\varepsilon>0$, tako da je $x+td\in D$ za vse $t\in[0,\varepsilon)$. Množico vseh dopustnih smeri v točki x označimo z $S(x)$.

Pripomba: Če je x notranja točka območja D, je $S(x)=\mathbb{R}^n$.

Definicija. Točka $x\in D$ je *kritična točka* funkcije f na D, če za vse $d\in S(x)$ velja: $\langle d,$

$f(x)\rangle \geq 0$.

Pripomba: Če je x notranja točka območja D, je pogoj "$\langle d,$
$f(x)\rangle \geq 0$ za vse $d \in S(x)$" enakovreden pogoju "
$f(x) = 0$". V tem primeru pojem kritične točke sovpada s pojmom stacionarne točke.

Lema. *Če ima f v točki $x_* \in D$ lokalni minimum na D, je x_* kritična točka f na D.*

Izrek o kritičnih točkah odvedljive konveksne funkcije. *Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, $D \subseteq \Omega$ konveksna množica in $f: \Omega \to \mathbb{R}$ odvedljiva konveksna funkcija. Potem ima f v točki $x_* \in D$ globalni minimum na D natanko tedaj, ko je x_* kritična točka f na D.*

Oznake. Za $x \in D$ označimo z $V(x) = \{ i \in \{1, \ldots, m\};\ g_i(x) = 0\}$ množico indeksov *aktivnih vezi* v točki x. Označimo še $T(x) = \{ d \in \mathbb{R}^n;\ \forall i \in V(x):\ \langle d,$
$g(x)\rangle \leq 0\}$.

Trditev. Za vse $x \in D$ je zaprtje množice $S(x)$ vsebovano v množici $T(x)$.

Definicija. Vezi $g_1, g_2, \ldots, g_m$ so *regularne* v točki $x \in D$, če je zaprtje množice $S(x)$ enako množici $T(x)$.

Izrek (potrebnost pogojev KKT za optimalnost). *Če ima f v točki $x_* \in D$ lokalni minimum na D in so vezi v tej točki regularne, točka x_* zadošča pogojem KKT.*

Navedli smo nekaj zadostnih pogojev za regularnost vezi:

a) *Če so vezi linearne, so regularne povsod na D.*
b) *Če je problem VEN konveksen in ima množica D neprazno notranjost, so vezi regularne povsod na D.*
c) *Če so gradienti vezi linearno neodvisni v točki $x \in D$, so vezi regularne v x.*

Fisherjev model trga

Kot zanimiv in netrivialen primer uporabe teorije KKT smo opisali **Fisherjev model trga**, kjer iščemo ravnovesne cene p in optimalno razdelitev dobrin x med kupce, pri čemer zahtevamo, da kupci porabijo ves svoj denar, da so vse dobrine razprodane in da je zadovoljstvo vsakega kupca z razdelitvijo dobrin x glede na cene p maksimalno.

Podatki: $m =$ število kupcev, $n =$ število dobrin

$a_i > 0$ ...... kapital kupca i (za $i = 1, \ldots, m$)
$b_j > 0$ ...... količina dobrine j na trgu (za $j = 1, \ldots, n$)

$u_{ij} \geq 0$ .... zadovoljstvo kupca i z nakupom enote dobrine j (za $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$)

Iščemo:

$p_j > 0$ ...... ceno dobrine j (za $j=1,\ldots,n$)

$x_{ij} \geq 0$ ..... količino dobrine j, ki jo kupi kupec i (za $i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n$)

pri pogojih

(1) $\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = a_i$ (za $i=1,\ldots,m$): vsak kupec porabi ves svoj kapital,
(2) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (za $j=1,\ldots,n$): vsaka dobrina je razprodana,
(3) za vsakega kupca $i=1,\ldots,m$ je njegovo skupno zadovoljstvo z nakupom

$$u_i(x) := \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_{ij}$$

pri cenah p največje med vsemi rešitvami x sistema enačb (1) in (2).

Definicija. Cene p so *ravnovesne*, če obstaja razdelitev dobrin x, ki zadošča pogojem (1), (2), (3). Pripadajočo razdelitev dobrin imenujemo *optimalna razdelitev.*

Pri reševanju Fisherjevega modela trga želimo hkrati maksimizirati m funkcij $u_i(x)$ $(i=1,\ldots,m)$, česar ne znamo storiti neposredno. Zato za namensko funkcijo vzamemo geometrično sredino funkcij $u_i(x)$, uteženih s kapitalom a_i. Poenostavimo jo z logaritmiranjem in množenjem s konstanto $a_1 + \cdots + a_m > 0$. Dodatno privzamemo:

1. za vsak i obstaja j, tako da je $u_{ij} > 0$ (ni povsem nezadovoljnega kupca),
2. za vsak j obstaja i, tako da je $u_{ij} > 0$ (ni povsem nezaželene dobrine),
3. $b_j = 1$ $(j=1,\ldots,n)$: za mersko enoto dobrine j vzamemo kar količino te dobrine na trgu.

Zdaj definiramo pripadajoči ***Eisenberg-Galeov konveksni program (EGP)*** takole:

Iščemo $\min\{f(x);\ x \in D\}$,

kjer je $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sum_{i=1}^{m} a_i \ln u_i(x)$, $u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_{ij}$ za $i=1,\ldots,m$,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^{mn};\ u_i(x) > 0 \text{ za } i=1,\ldots,m\},$$
$$D = \{x \in \Omega;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1\ (j=1,\ldots,n), x_{ij} \geq 0\ (i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n)\}.$$

Pokazali smo:

Trditev. *Fisherjevemu modelu pripadajoči EGP ima optimalno rešitev.*

Videli smo, da je EGP konveksen problem VEN z linearnimi vezmi, torej je vektor x optimalna rešitev EGP natanko tedaj, ko zadošča pogojem KKT.

Izrek. *Razdelitev dobrin x v Fisherjevem modelu trga je optimalna natanko tedaj, ko je x optimalna rešitev pripadajočega EGP.*

Optimalno razdelitev dobrin v Fisherjevem modelu trga lahko torej poiščemo tako, da rešimo pogoje KKT pripadajočega EGP z Lagrangeevimi množitelji $p_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$ in $\lambda_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n)$:

(KKT1) $p_j = \frac{a_i u_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_{ij}} + \lambda_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n)$

(KKT2a) $p_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - 1 \right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

(KKT2b) $\lambda_{ij} x_{ij} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n)$

(KKT3a) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad (j = 1, \ldots, n)$

(KKT3b) $x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n)$

To je sistem enačb in neenačb z $2mn + n$ neznankami p_j, λ_{ij}, x_{ij}. Pri dokazu gornjega izreka smo videli, da so Lagrangeevi množitelji prve skupine vezi, p_j, ravno iskane ravnovesne cene dobrin v Fisherjevem modelu trga.