Farkaseva lema v dveh oblikah:

$$\begin{aligned}\exists x \geq 0 : Ax = b &\iff \forall y : (A^\top y \geq 0 \Rightarrow b^\top y \geq 0)\\ \exists x \geq 0 : Ax \leq b &\iff \forall y \geq 0 : (A^\top y \geq 0 \Rightarrow b^\top y \geq 0)\end{aligned}$$

$f : K \to \mathbb{R}$ je konveksna funkcija, če je K konveksna množica in velja

$$\forall x, y \in K \ \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

1. Določi konveksne ovojnice naslednjih množic:

$$A = \{x\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad B = \{x, y\} \subset \mathbb{R}^2, \qquad C = \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}^2, \qquad D = \{w, x, y, z\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$E = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\}, \qquad F = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,1) \mid y \in \mathbb{R}\},$$
$$G = \left\{(x, x^2) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}, \qquad H = \left\{(x, x^3) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}, \qquad K = \left\{\left(x, (x-1)^2(x+1)^2\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Dana sta matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & -1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 1/8 & 1/16 \end{pmatrix} \qquad \text{in vektor} \quad b = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ -1/8 \end{pmatrix}.$$

Dokaži, da sistem linearnih enačb $Ax = b$ nima rešitve, za katero bi veljalo $x \geq 0$.

3. S pomočjo Farkaseve leme dokaži, da je sledeči linearni problem nedopusten.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Določi območja, kjer so sledeče funkcije konveksne:

$$c(x) = -2, \qquad f(x) = 1 - 2x, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = x^3, \qquad k(x) = (x-1)^2(x+1)^2.$$

5. Naj bo A konveksna množica in $f, g : A \to \mathbb{R}$ konveksni preslikavi. Dokaži, da je $h = \max\{f, g\}$ konveksna preslikava.