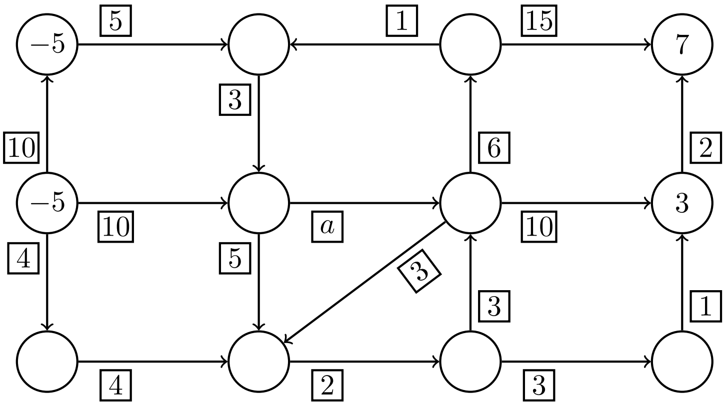
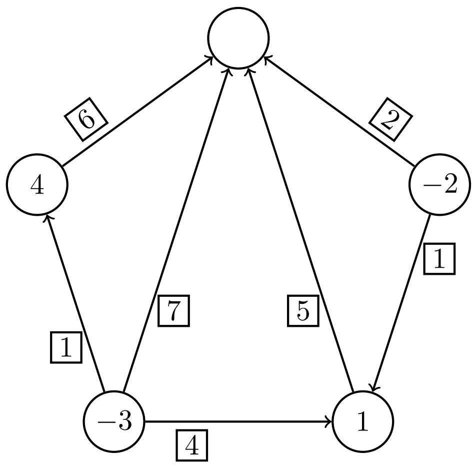
Vaje iz Optimizacijskih metod (FiM), *Problem razvoza* 9.–10. april 2014 **7**

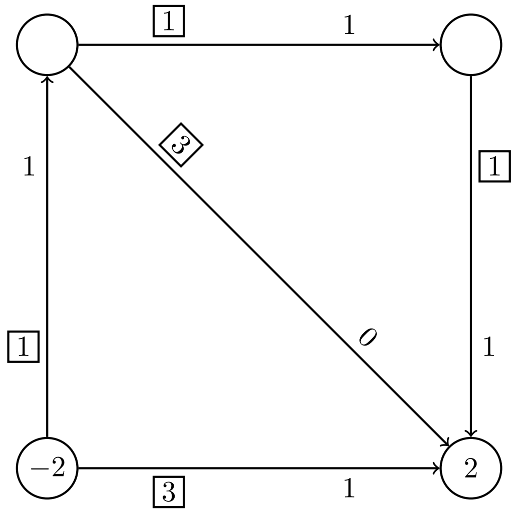
1. Reši problem razvoza na grafu s simpleksno metodo za omrežje v odvisnosti od parametra a.



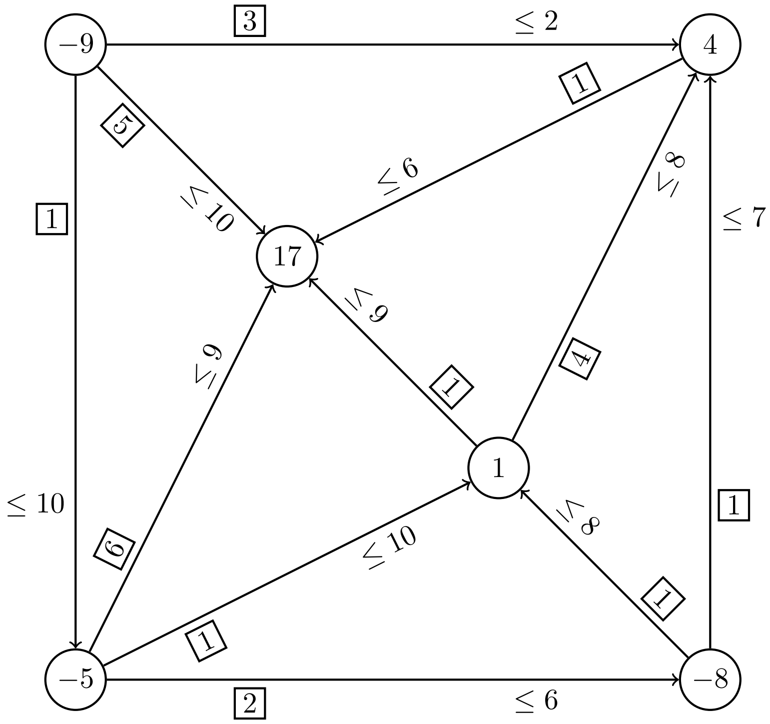
2. Pokaži, da problem razvoza nima dopustne rešitve.



3. S pomočjo dualnosti dokaži optimalnost podanega razvoza.

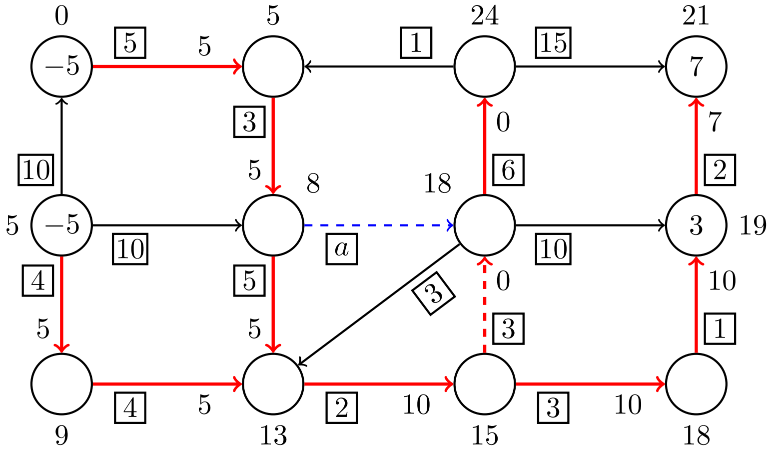


4. Reši problem razvoza na grafu z omejitvami.



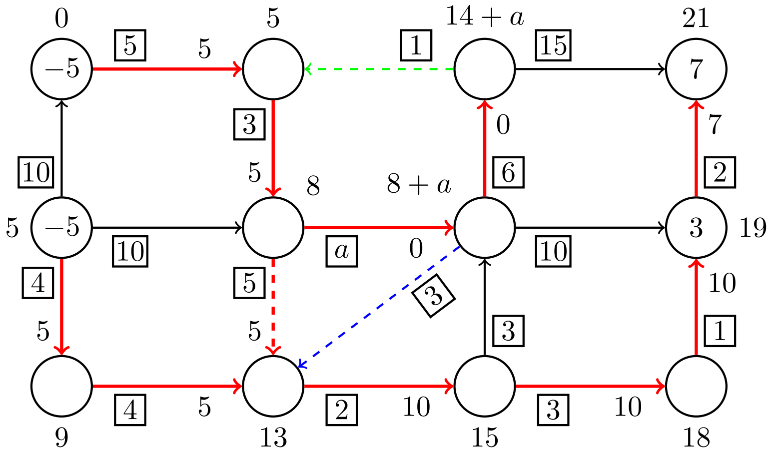
Rešitve

1. Najprej rešimo problem razvoza brez povezave s parametrom:

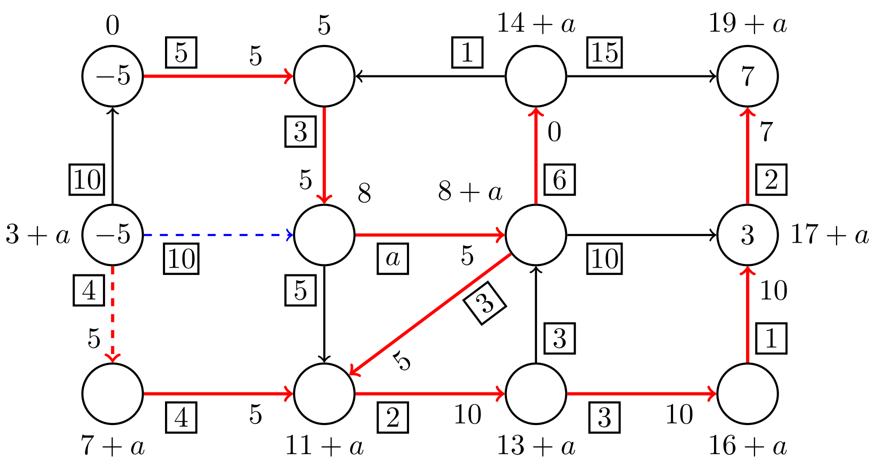


Če je $a \geq 18 - 8 = 10$, imamo optimalno rešitev s ceno
$5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 = 179$

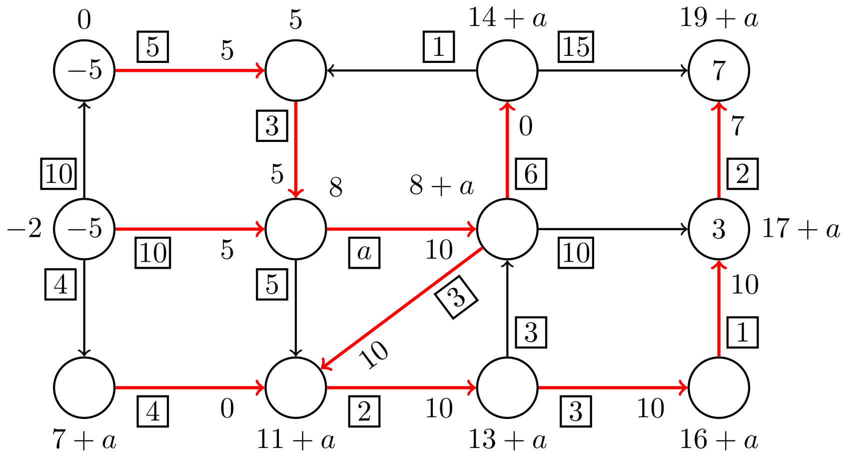
Sicer ($a < 10$):



Če je $a < -10$, imamo negativen cikel, torej je problem neomejen. Če je $2 \leq a < 10$, imamo optimalno rešitev (cena je spet 179, saj je izstopila povezava z razvozom 0). Sicer ($-10 \leq a < 2$):

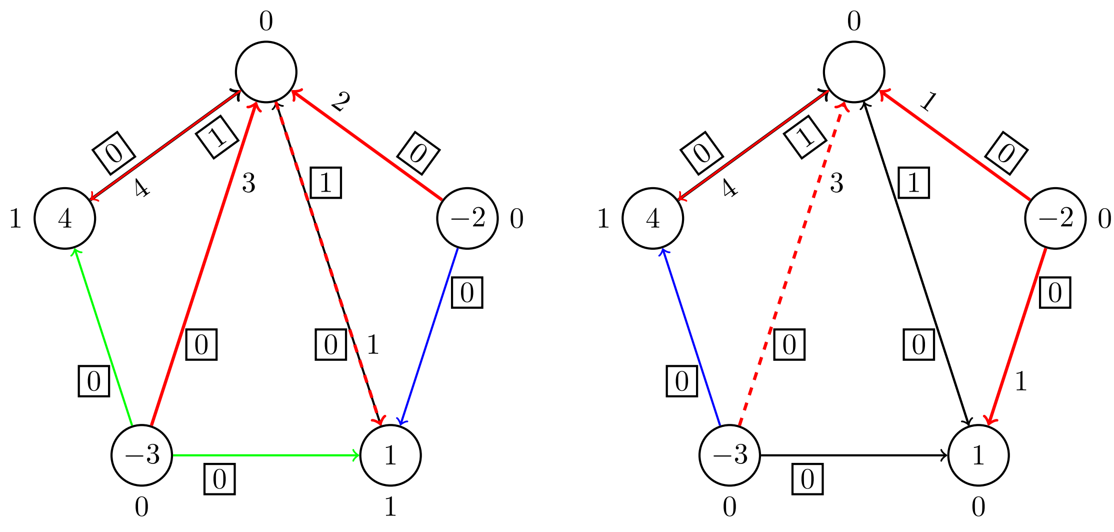


Če je $-5 \leq a < 2$, imamo optimalno rešitev s ceno
$c^* = 5\cdot5+4\cdot5+4\cdot5+3\cdot5+a\cdot5+2\cdot10+3\cdot5+6\cdot0+3\cdot10+1\cdot10+2\cdot7 = 169+5a$, $144 \leq c^* < 179$.
Sicer ($-10 \leq a < -5$) dobimo sledečo optimalno rešitev:

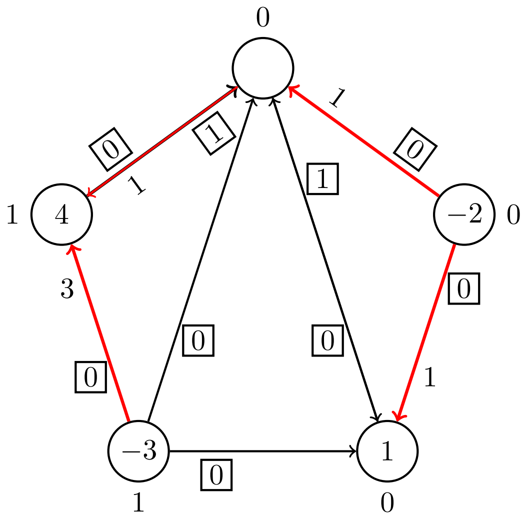


Cena razvoza:
$c^* = 5\cdot5+10\cdot5+4\cdot0+3\cdot5+a\cdot10+2\cdot10+3\cdot10+6\cdot0+3\cdot10+1\cdot10+2\cdot7 = 194+10a$,
$94 \leq c^* < 144$.

2. Poskusimo poiskati začetno dopustno rešitev:



Optimalna rešitev prve faze:



Optimalna rešitev prve faze vsebuje umetno povezavo s pozitivnim razvozom (cena optimalne rešitve je torej pozitivna), zato originalni problem nima dopustne rešitve.

3. Podani problem in njegov dual lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \\ & -x_1 - x_2 = -2 \\ & x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ & x_4 - x_5 = 0 \\ & x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & -2y_1 + 2y_4 \\ & -y_1 + y_2 \leq 1 \\ & -y_1 + y_4 \leq 3 \\ & -y_2 + y_4 \leq 3 \\ & -y_2 + y_3 \leq 1 \\ & -y_3 + y_4 \leq 1 \end{aligned}$$

Podana rešitev je $x = (1, 1, 0, 1, 1)$ in je očitno dopustna. Po dualnem dopolnjevanju dobimo sistem enačb

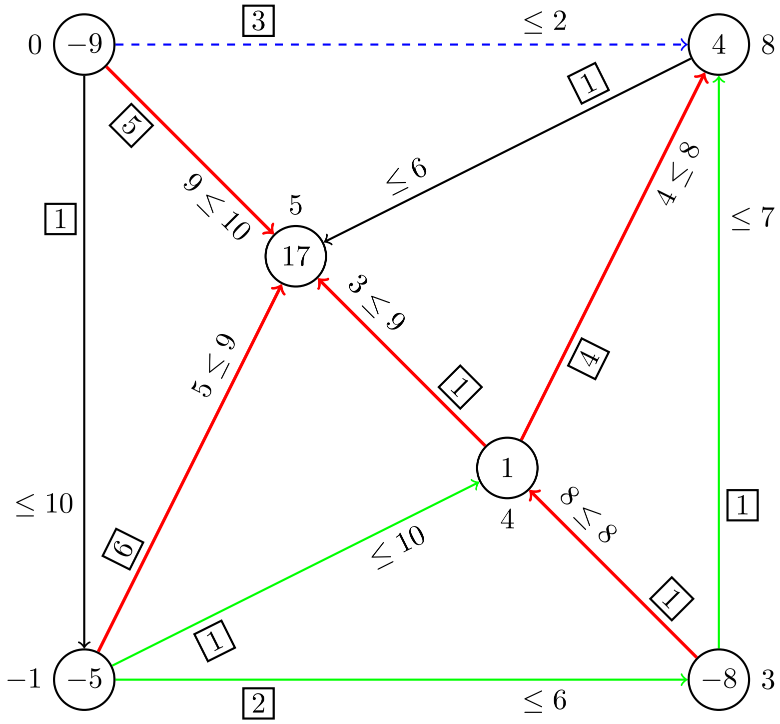
$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 &= 1 \\ -y_1 + y_4 &= 3 \\ -y_2 + y_4 &= 1 \\ -y_3 + y_4 &= 1 \end{aligned}$$

s splošno rešitvijo $y_2 = y_1 + 1$, $y_3 = y_1 + 2$, $y_4 = y_1 + 3$. Ker spremenljivke dualnega problema niso omejene, lahko izberemo npr. $y_1 = 0$ in torej $y = (0, 1, 2, 3)$. Preveriti moramo še, ali ustreza preostali neenakosti iz dualnega programa, torej

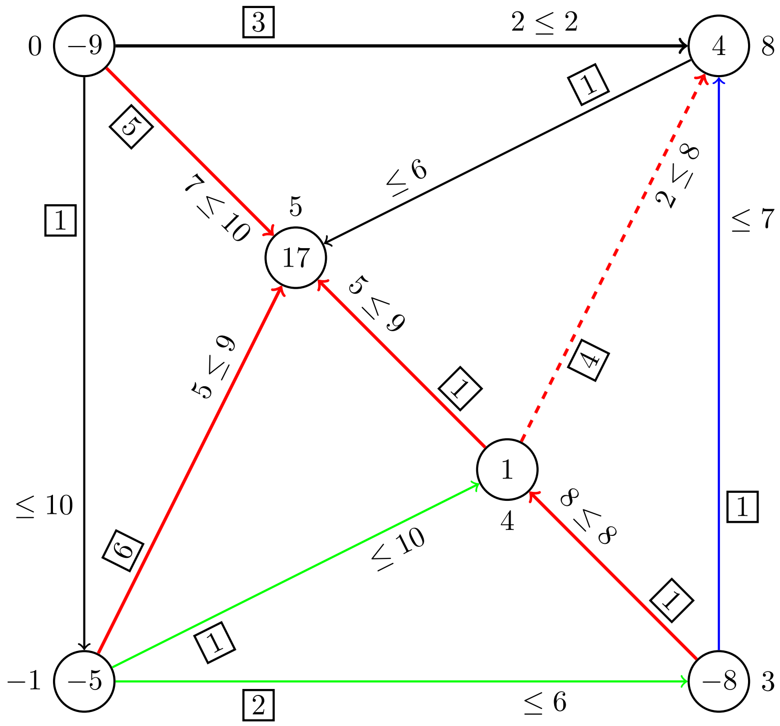
$$-y_2 + y_4 \leq 3.$$

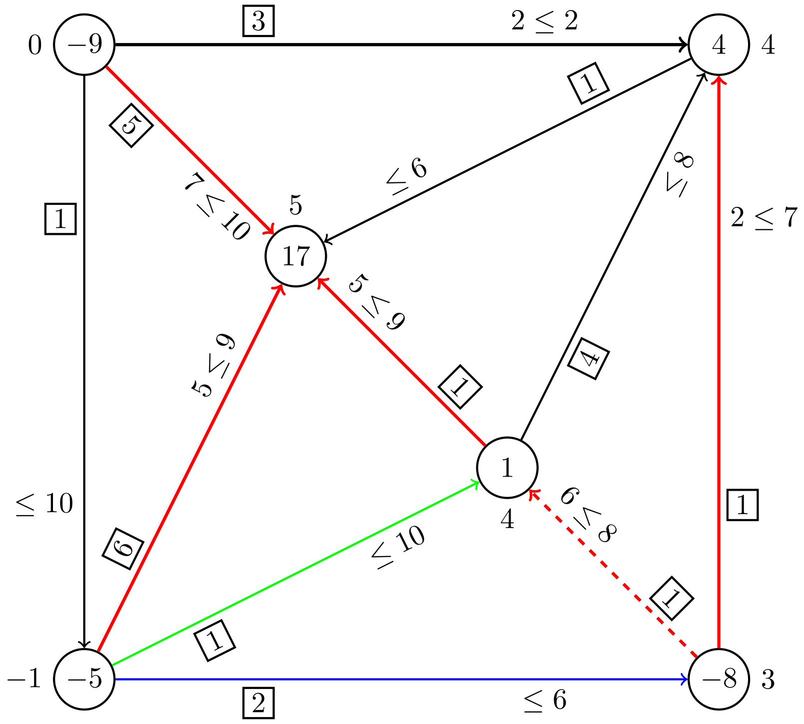
Ker ustreza, je torej y dopustna rešitev dualnega problema ter sta tako x in y optimalni rešitvi primalnega in dualnega problema.

4. Poiščemo začetno dopustno drevesno rešitev:

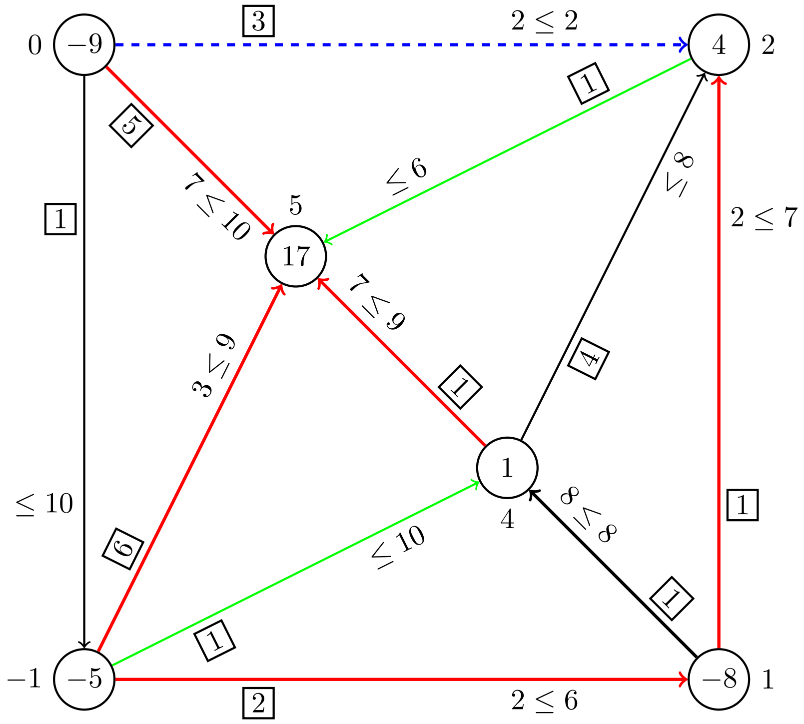


Reševanje:

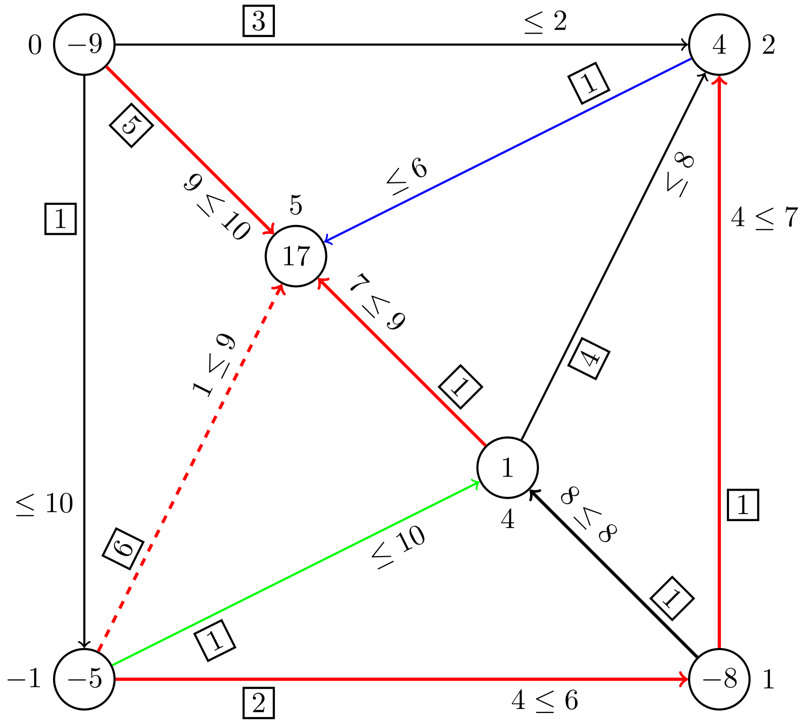


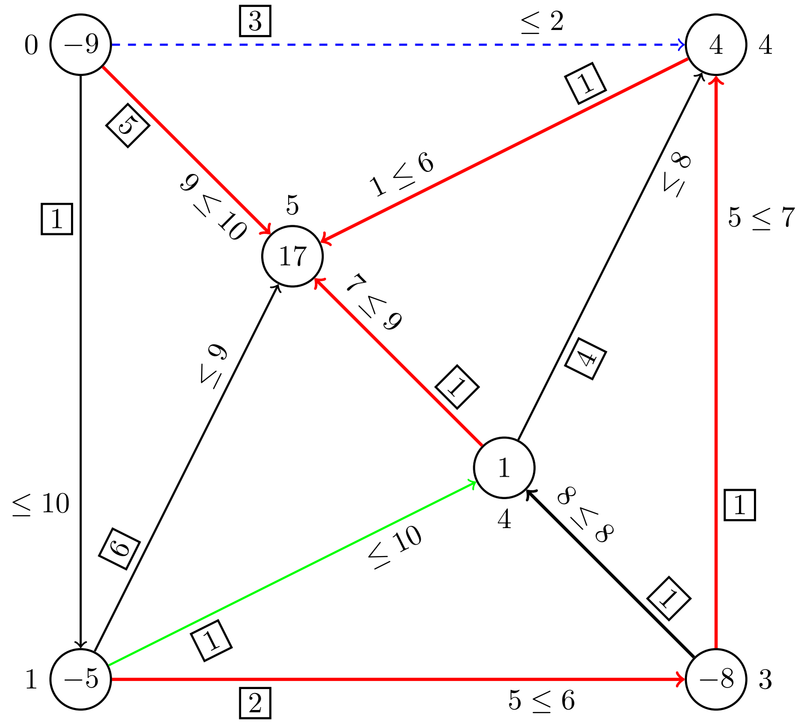


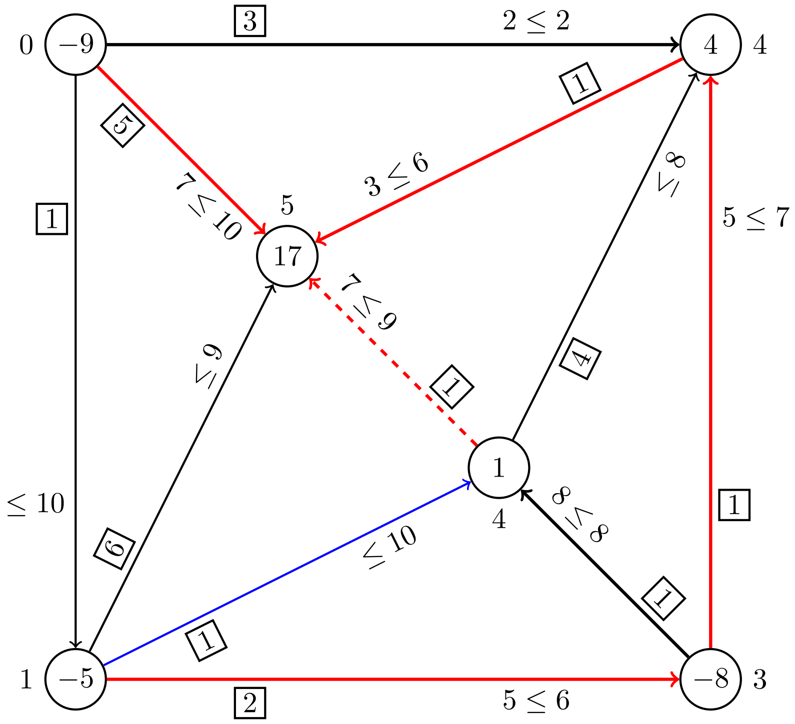
0
−9
3
2 ≤ 2
4
4
5
1
7 ≤ 10
≤ 6
≤ 8
2 ≤ 7
5
17
5 ≤ 9
5 ≤ 9
1
4
1
≤ 10
6
4
6 ≤ 8
≤ 10
1
1
−1
−5
−8
3
2
≤ 6



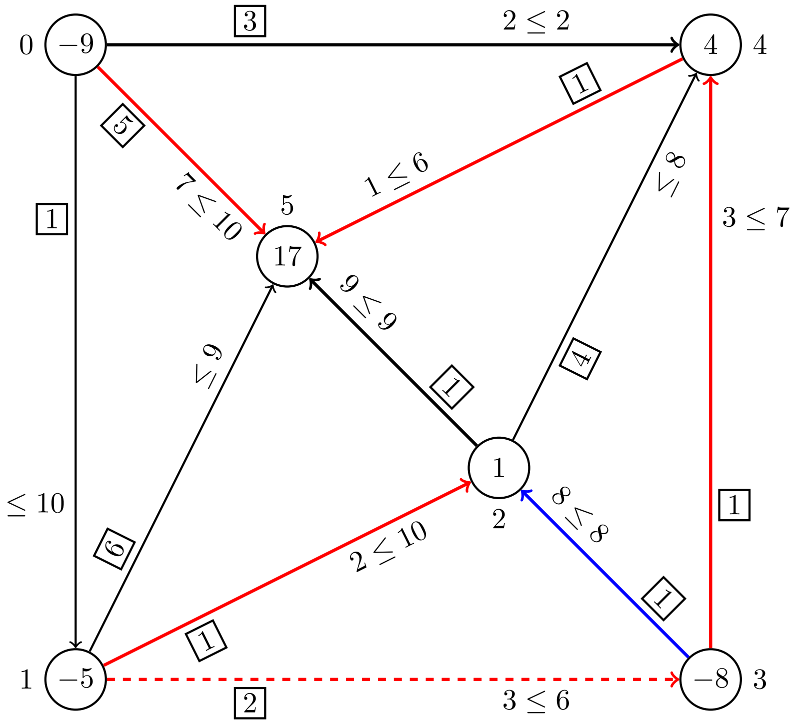
0
−9
3
2 ≤ 2
4
2
5
1
7 ≤ 10
≤ 6
≤ 8
2 ≤ 7
5
17
7 ≤ 9
3 ≤ 9
1
4
1
≤ 10
6
4
8 ≤ 8
≤ 10
1
1
−1
−5
−8
1
2
2 ≤ 6


0
−9
3
≤ 2
4
2
1
5
≤ 6
1
≤ 8
9 ≤ 10
5
17
4 ≤ 7
7 ≤ 9
1 ≤ 9
1
4
1
≤ 10
8 ≤ 8
4
6
≤ 10
1
1
−1
−5
−8
1
2
4 ≤ 6

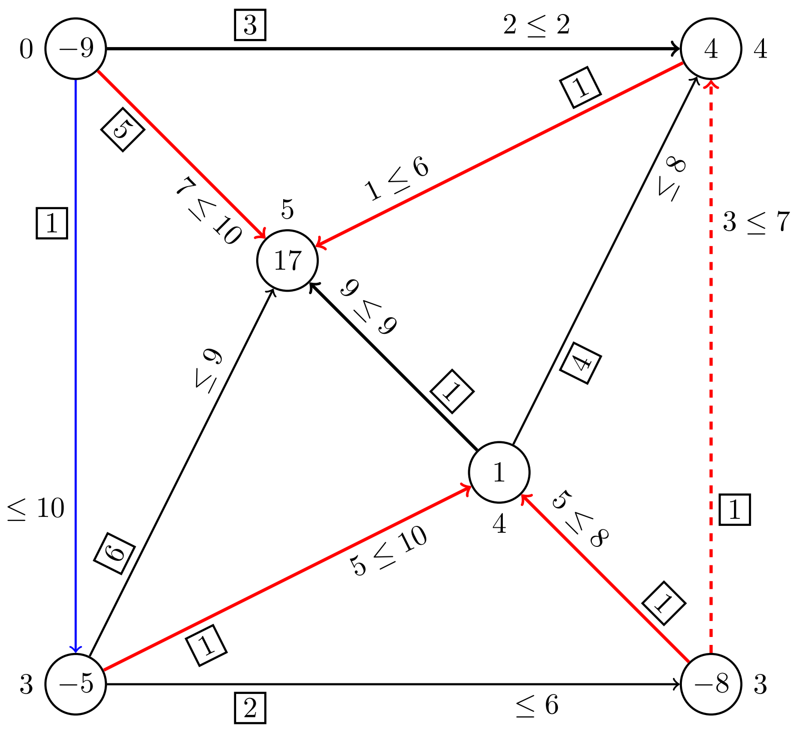

0
−9
3
≤ 2
4
4
5
1
1 ≤ 6
≤ 8
9 ≤ 10
5
17
5 ≤ 7
7 ≤ 9
≤ 9
1
4
1
≤ 10
8 ≤ 8
4
6
≤ 10
1
1
1
−5
−8
3
2
5 ≤ 6



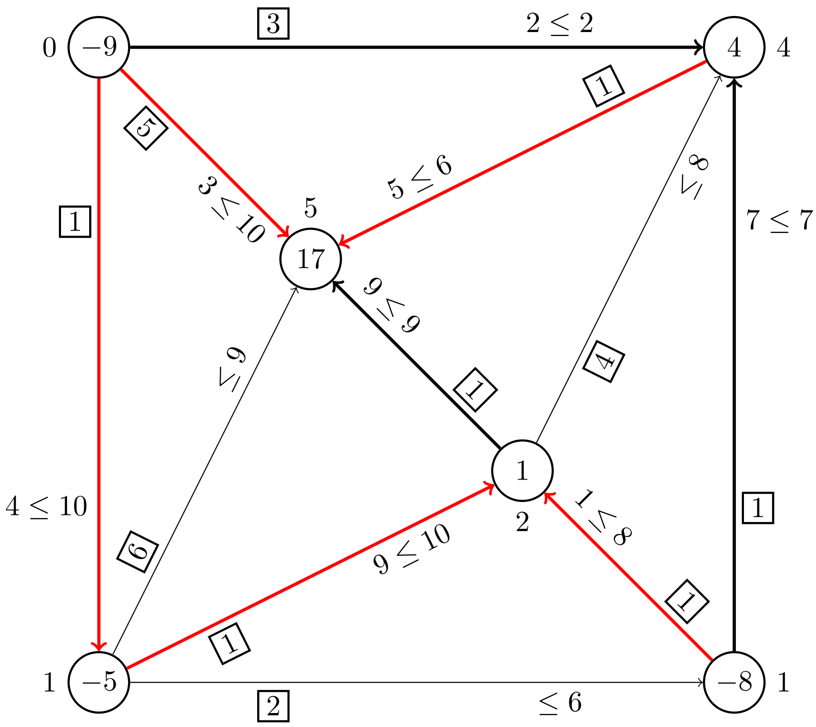
0
−9
3
2 ≤ 2
4
4
5
1
1
7 ≤ 10
3 ≤ 6
≤ 8
5 ≤ 7
5
17
7 ≤ 9
≤ 9
1
4
1
4
8 ≤ 8
≤ 10
6
≤ 10
1
1
1
−5
−8
3
2
5 ≤ 6



0
−9
3
2 ≤ 2
4
4
5
1
1
7 ≤ 10
1 ≤ 6
≤ 8
3 ≤ 7
5
17
9 ≤ 9
≤ 9
1
4
1
2
8 ≤ 8
≤ 10
6
2 ≤ 10
1
1
1
−5
−8
3
2
3 ≤ 6



Rešitev:



Cena razvoza: $3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 9 = 56$