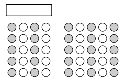
Operacijske raziskave – 2. izpit

9. julij 2012

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!



Sedež (2.04)

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Dan je algoritem H, ki na vhodu sprejme enostaven[1] neusmerjen graf G in različni vozlišči $u, v \in V(G)$:

```
1:  if |V(G)| == 2 and u ∈ sosedi(v) then
2:      return TRUE
3:  end if
4:  if sosedi(u) ⊆ {v} then
5:      return FALSE
6:  end if
7:  for all w ∈ sosedi(u)\{v} do
8:      if H(G − u, w, v) then
9:          return TRUE
10:     end if
11: end for
12: return FALSE.
```

Oznaka $G - u$ predstavlja graf, ki ga dobimo iz G tako, da odstranimo vozlišče u in vse povezave iz u.

a) Za katere vhode (G, u, v) algoritem H vrne TRUE?
Namig: Poglej, kako je z grafi z dvema vozliščema, kako je z grafi s tremi vozlišči, štirimi, petimi ... in poskusi posplošiti.

b) Pri tej točki se omejimo na zelo posebne vhode. Naj bo $G =$ (poln graf na $n - 1$ vozliščih) + (izolirano vozlišče), naj bo $v \in V(G)$ izolirano vozlišče in $u \in V(G)$, $u \neq v$. Pokaži, da se 12. vrstica algoritma H na takih vhodih izvede $O(n!)$-krat.

[1] tj. brez vzporednih povezav in zank

2. naloga (25 točk)

Čmrlja Gaber in Bor slovita kot najhitrejša letalca med čmrlji. Nedavno je Gaber izzval Bora na dirko čez travnik, kjer pot ni vnaprej določena. Bor je izziv sprejel in dogovorila sta se za pravili:

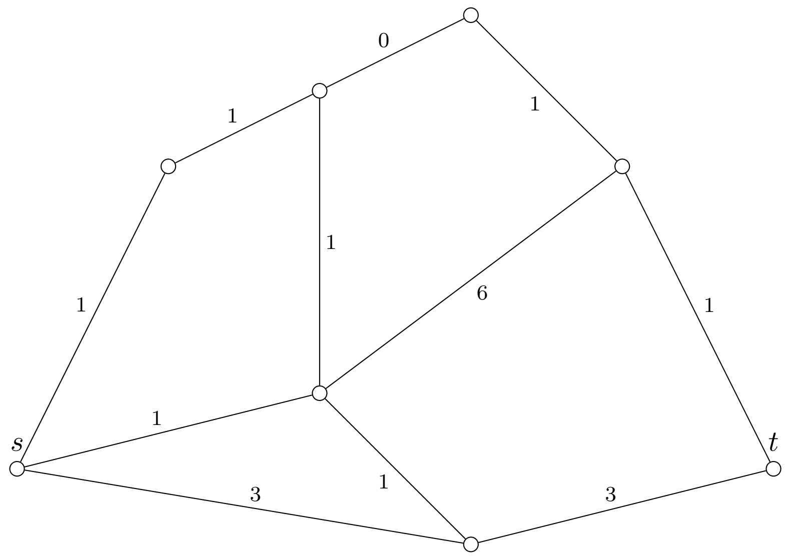
- določila sta točki s in t: začneta v s, in kdor prvi pride v t, zmaga.
- določila sta tudi graf poti G, po katerih lahko letita. Povezave v tem grafu sta določila tako, da je čas letenja (če ni rožic na povezavi) od enega do drugega krajišča za vse povezave enak (čmrlja sta enako hitra). Vozlišča v tem grafu pa sta določila tako, da na njih ne raste nobena rožica.

Znano je, da če katerikoli čmrlj prileti do kake rožice, se na njej zadrži enako dolgo, kot potrebuje za prelet ene povezave brez rožic. Rožice izven poti bosta čmrlja z lahkoto spregledala, saj gre za prestižno tekmo.

Tvoja naloga je, da Gabru pomagaš do zmage. Torej, če poznaš graf G, točki s in t ter število rožic na vsaki povezavi, katero pot naj izbere?

a) Prevedi zgornji problem na kak znan problem in predlagaj neki znani algoritem, s katerim ga lahko rešiš.

b) Reši problem za naslednji graf, kjer je na povezavah število rožic:



3. naloga (25 točk)

Dan je številski trikotnik

$$A = \begin{array}{ccccccccc} & & & & a_{1,1} & & & & \\ & & & a_{2,1} & & a_{2,2} & & & \\ & & a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} & & \\ & \iddots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & & a_{n,2} & & \cdots & & a_{n,n-1} & & a_{n,n} \end{array},$$

kjer so $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$. *Spust* v takem trikotniku je pot od vrha do dna (tj. začne se v $a_{1,1}$ in vsaka naslednja točka na spustu je tik pod prejšnjo (levo spodaj ali desno spodaj)), teža spusta pa je vsota števil, po katerih spust poteka.

S pomočjo dinamičnega programiranja poišči najtežji spust v A.

4. naloga (25 točk)

Družina Vinar iz Vurberka že več kot 200 let prideluje vino. Njihovi začetki segajo še v čas Habsburžanov, ko je Janez Vinar od grofa Herbersteina v dar prejel najlepši vinograd na Vurberku. Janez je kmalu začel dobivati naročila od okoliških gostincev in vsako leto je moral razmisliti, kako bo razdelil svoj pridelek med porabnike. Danes njegov daljni potomec (prav tako Janez) nadaljuje s tradicijo …

Če je letina dobra (predpostavimo, da je vsako leto dobra letina), pridela Janez 2000 litrov rumenega muškata, 10.000 litrov laškega rizlinga in 5000 litrov renskega rizlinga. Njegovi standardni odkupniki sta bara Kocka in Luka, župnišče Sv. Martin in občina Duplek. V naslednji tabeli je prikazano, koliko litrov vina je vsak pripravljen (največ) kupiti.

kupec	Kocka	Luka	občina	župnišče
količina v litrih	15.000	5000	1000	500

Teče drugo leto Janezovega vinogradništva. To leto se je odločil, da bo vino prodajal le v flaškonih po 10 litrov in postavil je fiksne cene, vidne v spodnji tabeli.

sorta	rumeni muškat	laški rizling	renski rizling
cena za flaškon	12	8	15

A ne gre brez omejitev. Vsak bar zahteva, da Janezu skupno plača največ toliko, kot mu plačata skupaj župnišče in občina. V župnišču želijo 500 litrov vina, ki naj ni laški rizling. V občini želijo vsaj 500 litrov renskega rizlinga, drugih sort pa sploh ne bodo kupovali. Nazadnje se je oglasila še Janezova žena, ki želi ohraniti doma vsaj toliko sorte A, kot je Janez proda kupcema B in C skupaj. Toda parametrov v ženini zahtevi nam Janez ne želi zaupati.

Napiši tak celoštevilski linearni program (tako da Janez lahko vstavi ustrezne ženine parametre), ki bo Janezu drugo leto pomagal pri prodaji vina, tako da bo njegov zaslužek kar največji.