

Operacijske raziskave – 1. izpit

26. junij 2012

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Dr. Kaczynski se ukvarja s podatkovno strukturo A , ki je zelo podobna tabeli (angl. array) celih števil. Vrednosti v posameznih celicah “tabele” A lahko beremo, ne moremo pa jih spreminjati. Elementi “tabele” A so indeksirani s celimi števili od 1 do n , kjer je $n = A.length()$ indeks zadnjega elementa “tabele” A . Edina operacija (poleg dostopanja do posameznih elementov), ki jo lahko izvajamo nad A , je “obračanje podtabele”. Če ima na začetku A naslednje vrednosti:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_n],$$

po klicu ukaza $A.obrni(i, j)$ izgleda takole:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{j-1}, \dots, a_{i+1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_n].$$

Dr. Kaczynski se je lotil implementacije algoritmov nad to podatkovno strukturo. Najprej je seveda implementiral algoritem za urejanje:

```
1:  $n \leftarrow A.length()$ 
2: for  $i \leftarrow 2 \dots n$  do
3:    $j \leftarrow i$ 
4:   while  $j > 1$  &  $A[j - 1] > A[i]$  do
5:      $j \leftarrow i - 1$ 
6:   end while
7:    $A.obrni(j, i)$ 
8:   if  $j + 1 < i$  then
9:
10:  end if
11: end for
```

a) V zgornji algoritem se je prikradla manjša tipkarska napaka, poleg tega pa je ena vrstica celo izginila. Popravi algoritem, da bo deloval pravilno.

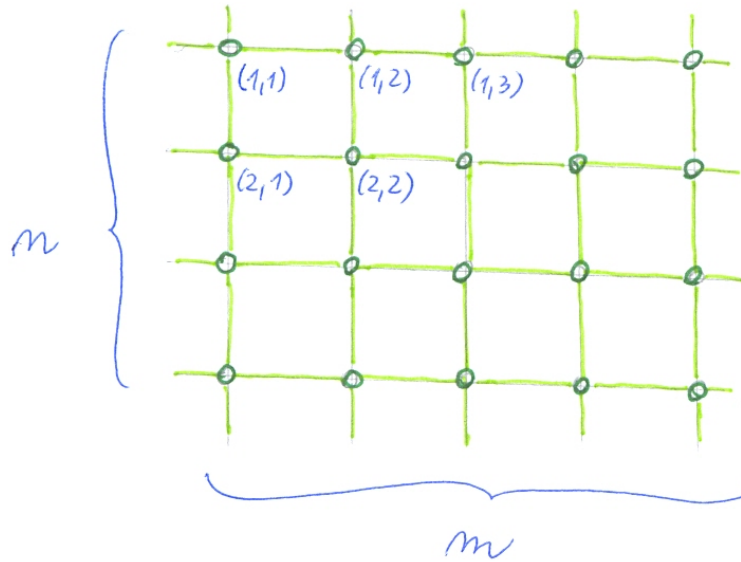
b) (Popravljeni) algoritem izvedi na “tabeli” $A = [5\ 3\ 12\ 9\ 1\ 15]$.

2. naloga (25 točk)

V nekem velikem mehiškem mestu je center mesta sestavljen iz ulic, ki so pravokotne ena na drugo in iz ptičje perspektive zgledata kot pravokotna karirasta mreža (glej sliko ??). Vse banke se nahajajo v centru, in sicer tik ob križiščih (v vsakem križišču kvečjemu ena banka). Križišča so označena, kot je prikazano na sliki. V tem mestu so ropi bank zelo pogosti. Tako pogosti, da se včasih roparji na begu zaletijo med seboj (saj bežijo pred policijskimi vozili pri veliki hitrosti). Če ropar uspe pripeljati do ulice, ki vodi ven iz centra, je “rešen”, saj center obdajajo slumi, kjer policija nima moči, saj jih nadzirajo mafijski botri. Roparji so se sestali na Veliki mafijski konferenci 2012 in sklenili temu kaosu narediti konec. Odločili so se, da bodo naročili informacijski sistem, kamor bodo vsak večer vnesli lokacije bank, ki jih nameravajo oropati, program pa jim bo sestavil načrt ropov za naslednji dan. Rope je mogoče izvesti, če:

- so vse lokacije bank različne (dve ekipi ne smeta na isti dan oropati iste banke),
- za vsako lokacijo obstaja pot, ki pelje ven iz centra, tako da nobeni dve poti ne gresta vzdolž iste ulice (s tem poskušamo preprečiti, da bi se roparji medsebojno zaleteli; smer vožnje pri tem ni pomembna).

Opiši algoritem, ki bo kot vhod dobil celi števili n in m , ki predstavljata število vodoravnih in navpičnih ulic, in seznam lokacij bank L . Algoritem naj vrne seznam poti, po katerih bodo roparji bežali (za vsako lokacijo po eno pot). Če vseh ropov ni mogoče izvesti, naj algoritem javi napako.

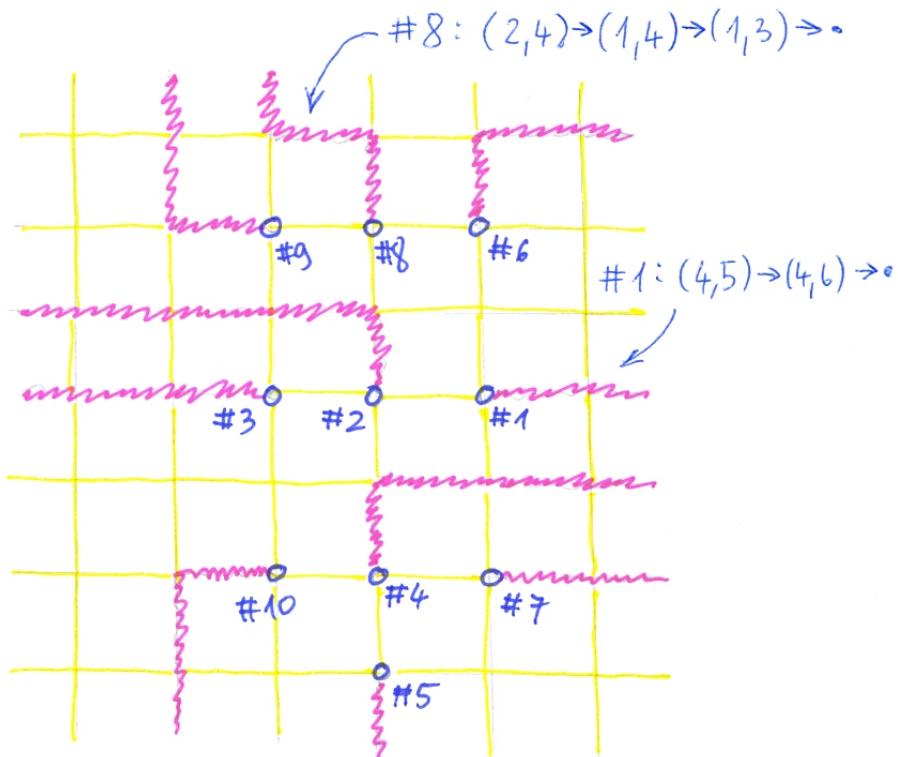


Slika 1: Center mesta

Zgled: Za $n = 7$, $m = 6$ in

$$L = \{(4, 5), (4, 4), (4, 3), (6, 4), (7, 4), (2, 5), (6, 5), (2, 4), (2, 3), (6, 3)\}$$

dobimo na primer poti, ki jih prikazuje slika:



3. naloga (25 točk)

Nori prof. Boltežar stanuje v stolpnici, ki ima n nadstropij, ki so oštevilčena s števili od 1 do n . Nori stanovalci tega bloka radi mečejo cvetlične lončke z balkonov. Boltežar bi rad ugotovil, katero je najvišje nadstropje, s katerega lahko pade cvetlični lonček, da se še vedno ne poškoduje. Jasno je, da če se lonček razbije pri padcu s k -tega nadstropja, potem se razbije tudi pri padcu s $(k + 1)$ -vega nadstropja. Če bi imel le en cvetlični lonček, bi ga lahko metal po vrsti: najprej s prvega nadstropja, nato z drugega, nato s tretjega itd. V najslabšem primeru bi lonček vrgel n -krat (možno je, da lonček preživi tudi padec z n -tega nadstropja).

Ker ima Boltežar doma kar dva enaka lončka, lahko do rezultata pride z manjšim številom metov. S pomočjo **dinamičnega programiranja** ugotovi, kolikokrat mora vreči lonček v najslabšem primeru, če meče na optimalen način.

4. naloga (25 točk)

Med pet oseb želimo z uporabo denarnih nadomestil razdeliti pet nedeljivih predmetov, vsaki osebi po enega, tako da bo vsak dobil pošten delež in da bo delitev brez zavisti. V spodnji matriki je podano vrednotenje vsakega izmed 5 predmetov s strani vsake osebe (vsakemu predmetu ustreza svoj stolpec):

$$\begin{bmatrix} 5 & 23 & 9 & 25 & 24 \\ 9 & 21 & 11 & 17 & 10 \\ 8 & 18 & 11 & 20 & 20 \\ 8 & 22 & 12 & 10 & 15 \\ 6 & 17 & 15 & 14 & 12 \end{bmatrix}.$$

Kot izvajalci postopka želimo zaslužiti čimveč. Ker ni zunanjega financiranja, lahko naš zaslužek pridobimo le iz nadomestil. Uporabi znani algoritem za delitev pod opisanimi pogoji in razloži, kako si pridobiš kar največji zaslužek.