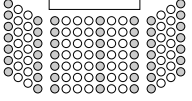


Operacijske raziskave – 1. kolokvij

5. april 2012

Čas pisanja je 115 minut. Možno je doseči 105 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1	
2	
3	
4	
Σ	



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

1. naloga (20 točk)

Naj bo usmerjen enostaven¹ graf G podan z matriko sosednosti $A(G)$. (Naj bo $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$. V matriki sosednosti $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ grafa G je $a_{ij} = 1$ natanko tedaj, ko je $ij \in E(G)$, sicer je $a_{ij} = 0$.) Želimo ugotoviti, ali v G obstaja kak usmerjeni trikotnik (tj. usmerjeni cikel dolžine 3).

a) (10) Konrad je napisal naslednji algoritem, ki naj bi rešil ta problem:

```
for  $i \leftarrow 1 \dots |V(G)|$  do
  for  $j \leftarrow 1 \dots |V(G)|$  do
    for  $k \leftarrow 1 \dots |V(G)|$  do
      for  $\ell \leftarrow 1 \dots |V(G)|$  do
        if  $a_{ij} = a_{jk} = a_{k\ell} = 1 \wedge \ell = i$  then
          return TRUE
        end if
      end for
    end for
  end for
end for
return FALSE
```

Ali algoritem deluje pravilno? Kakšna je njegova časovna zahtevnost?

b) (10) V psevdokodi napiši algoritem, ki reši problem v času $O(|V(G)|^3)$. Koliko korakov naredi tvoj algoritem v najboljšem in koliko v najslabšem primeru?

¹Enostaven graf je brez zank in vzporednih povezav.

2. naloga (30 točk)

Na kongresu se je zbralo n delegatov. Problem je v tem, da ne govorijo vsi skupnega jezika. Za vsakega delegata poznamo seznam jezikov, ki jih govori, skupaj s stopnjo znanja za vsak posamični jezik. Stopnja znanja je število med 1 in 100. Stopnja 1 pomeni, da oseba jezik popolnoma obvlada, stopnja 100 pa pomeni, da pozna zgolj nekaj osnovnih fraz. Recimo, da bi oseba A rada osebi B posredovala neko sporočilo. Če znata skupni jezik, se lahko pogovorita neposredno. Lahko pa oseba A pošlje sporočilo preko enega ali več posrednikov.

a) (20) Radi bi, da oseba B prejme sporočilo v najkrajšem možnem času (pri čemer lahko sporočilo potuje preko enega ali več posrednikov). Če osebi X in Y govorita skupni jezik in je stopnja obvladovanja tega jezika s_X za osebo X in s_Y za osebo Y , prenos sporočila traja $\max\{s_X, s_Y\}$ časovnih enot. (Če dve osebi ne obvladata dovolj dobro skupnega jezika, si lahko pomagata z opisovanjem pojmov, mahanjem rok, risanjem ipd.) Formuliraj zgornjo nalogo kot problem iskanja najkrajše poti v ustreznem grafu.

b) (10) Dan je naslednji seznam delegatov:

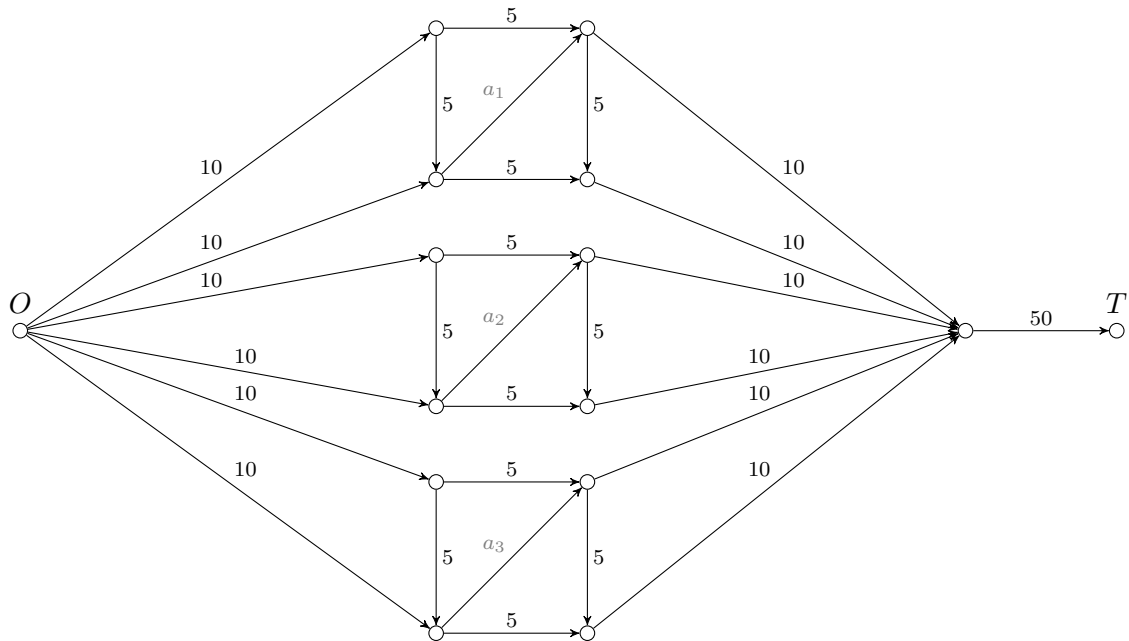
Delegat	Jeziki
Frank	(angleščina, 5), (španščina, 10), (ruščina, 80)
Ivan	(ruščina, 5), (španščina, 20), (angleščina, 95)
Paul-Henri	(francoščina, 5), (nemščina, 85), (angleščina, 95)
Brigitte	(nizozemščina, 10), (nemščina, 15)
Andrej	(slovenščina, 5), (nemščina, 10), (latinščina, 90)
Wolfgang	(nemščina, 5), (angleščina, 90)
Jafar	(arabščina, 5), (ruščina, 10), (nizozemščina, 30), (francoščina, 80)

Tabela 1: Delegati in njihovo znanje jezikov

Kako lahko Frank najhitreje posreduje informacijo Wolfgangu?

3. naloga (25 točk)

Iz zajetja O želimo preko treh čistilnih postaj (vsako predstavlja 4 vozlišča) napeljati vodo do tovarne T . Opravka imamo z vodovodnim omrežjem, predstavljenim z naslednjim grafom:



Na povezavah so kapacitete cevi (v litrih na sekundo), cevi z oznakami a_1 , a_2 in a_3 pa še niso zgrajene.

a) (10) Koliko vode lahko po danem omrežju dobi tovarna na sekundo?

b) (15) Trenutni dotok vode v tovarno za potrebe proizvodnje ni dovolj velik, zato razmišljajo o izgradnji novih cevi. Možne lokacije novih cevi so a_1 , a_2 in a_3 . Uprava tovarne se je odločila, da bodo s postavitvijo novih cevi na nekaterih možnih lokacijah povečali pretok kar največ, kot je mogoče. Cev kapacitete k stane $k \cdot 100$ €. Za inštalacijo ene cevi morajo plačati dodatnih 10000 €. Koliko najmanj jih bo stal projekt?

4. naloga (30 točk)

Na divjem žuru matematikov se je zbralo n ljudi. Organizator je priskrbel s različnih vrst sendvičev, a ne v neomejenih količinah. Na voljo imajo u_i sendvičev sorte i ($1 \leq i \leq s$). Prav tako imajo na voljo p različnih sokov; w_i predstavlja število sokov sorte i ($1 \leq i \leq p$). Za vsakega udeleženca zabave je znano, katere sokove in sendviče ima rad.

a) (20) Zanima nas, ali lahko hrano in pijačo razdelimo tako, da dobi vsak udeleženec zabave en sendvič, ki ga ima rad, in en sok, ki ga ima rad. Nalogo formuliraj kot problem maksimalnega pretoka v ustreznem grafu. Jasno napiši, kako iz dobljenega maksimalnega toka ugotovimo, ali želena razdelitev hrane in pijače obstaja.

b) (10) S pomočjo formulacije iz točke (a) reši nalogo za naslednje konkretne podatke:

Vrsta soka	Količina	Vrsta sendviča	Količina
Ananas	1	Pohanček	1
Črni ribez	1	Šoferski	2
Rdeča pomaranča	2	Kraški	2
Jagoda	2	Vegi	1
Borovnica	2		

Tabela 2: Zaloga sokov in sendvičev

Ime	Seznam sokov	Seznam sendvičev
Damir	ananas, jagoda	pohanček, šoferski
Jasna	ananas, črni ribez, jagoda	kraški, vegi
Bernard	črni ribez, jagoda	vegi, pohanček, šoferski
Matjaž	ananas, rdeča pomaranča	kraški, vegi
Sanela	borovnica, črni ribez, jagoda	vegi
Patrik	borovnica, jagoda	kraški, vegi

Tabela 3: Udeleženci zabave in njihove preference

