OPERACIJSKE RAZISKAVE

Rešitve 1. kolokvija

Naloga 1

a) Konradov algoritem deluje pravilno. Za vsake 4 točke v grafu pogleda, če so zaporedoma povezane in je prva enaka zadnji. Torej pregleda, ali v grafu obstaja cikel dolžine 3. Njegova časovna zahtevnost je $O(|V(G)|^4)$.

b)

for $i \leftarrow 1 \ldots |V(G)|$ **do**
  for $j \leftarrow 1 \ldots |V(G)|$ **do**
    for $k \leftarrow 1 \ldots |V(G)|$ **do**
      if $a_{ij} = a_{jk} = a_{ki} = 1$ **then**
        return TRUE
      end if
    end for
  end for
end for
return FALSE

Naš algoritem pregleda, ali obstajajo tri točke, ki so zapored povezane in je zadnja povezana s prvo. Torej vrne željeni rezultat. Ker imamo tri vgnezdene zanke, od katerih se vsaka ponovi največ $|V(G)|$-krat, naš algoritem naredi $O(|V(G)|^3)$ korakov. V najboljšem primeru, ko je v grafu cikel $1-2-3-1$, naredi algoritem $|V(G)|+3$ korake, v najslabšem primeru, ko v grafu ni cikla, pa $|V(G)|^3$ korake. Za en korak smo šteli eno iteracijo najbolj notranje zanke.

Naloga 2

a) Zgradimo neusmerjen graf, kjer so vozlišča osebe, povezave pa so natanko med tistima osebama, ki govorita isti jezik. Z $s_X[J]$ označimo stopnjo znanja jezika J osebe X. Če oseba X jezika J ne zna, naj bo $s_X[J] = \infty$. Naj bo $s_{\{X,Y\}}[J] = \max\{s_X[J], s_Y[J]\}$, torej je $s_{\{X,Y\}}[J]$ dolžina prenosa informacije med osebama X in Y v jeziku J. Utež na povezavi med osebo X in osebo Y naj bo "najkrajši čas prenosa sporočila med X in Y", tj.

$$\min_J s_{\{X,Y\}}[J],$$

kjer J teče po vseh jezikih.

Torej je najkrajši čas, da oseba B od osebe A prejme sporočilo, enak najkrajši poti med A in B v prirejenem grafu. Naj bo $(A = X_0, X_1 \dots X_k = B)$ najkrajša pot med A in B in naj bo d njena dolžina. Potem je najkrajši čas prenosa sporočila od osebe A do osebe B enak d in je dosežen, če oseba X_i prenese sporočilo osebi X_{i+1} v jeziku, v katerem je dosežen

$$\min_J s_{\{X_i, X_{i+1}\}}[J].$$

b) Imamo graf s pozitivnimi utežmi na povezavah in iščemo najkrajšo pot. Uporabimo npr. Dijkstrov algoritem, na koncu pa še pogledamo, v katerih jezikih se je prenašalo sporočilo. Dobimo rešitev:

$F-$(španščina)$-I-$(ruščina)$-J-$(nizozemščina)$-B-$(nemščina)$-W$.

Naloga 3

a) Naj bo $s = O$ in $t = T$. Enostavno je najti (s,t)-tok in (s,t)-prerez z vrednostjo 30 (potrebno ju je poiskati in označiti). Torej lahko tovarna dobi 30 litrov vode na sekundo.

b) Če zgradimo cev le na eni lokaciji, lahko (s,t)-tok povečamo največ za 10, saj lahko najdemo (s,t)-prerez vrednosti 40 (označit!). Če zgradimo cev na dveh lokacijah, lahko tok povečamo največ za 20. Toka, večjega od 50 namreč ne moremo dobiti, saj ima (s,t)-prerez na vseh točkah razen t vrednost 50. Torej je optimalno graditi na dveh lokacijah. Če torej na dveh lokacijah položimo cev kapacitete 10, dobimo (s,t)-tok vrednosti 50. Cena take investicije je 22000 €. To je tudi minimalna vrednost investicije, saj po zgornjem razmisleku vemo, da bomo 20000 € zapravili za inštalacijo, da povečamo tok za 20, pa rabimo povečanje kapacitet cevi vsaj za 20. Torej je minimalna cena projekta 22000 €.

Naloga 4

a) Problemu priredimo graf G. Ima naj 6 vrst točk:

- s
- za vsako vrsto sendviča svoja točka

- za vsako osebo *prva* točka
- za vsako osebo *druga* točka
- za vsako vrsto pijače 1 točka
- t

Iz točke s naj bodo do vseh vrst sendvičev povezave s kapacitetami u_i (za vsako vrste sendviča ustrezna kapaciteta). Nato naj bodo od vsake vrste sendviča povezave s kapaciteto 1 do tistih *prvih* oseb, ki tak sendvič jedo. Nato naj bo za vsako osebo povezava s kapaciteto 1 od *prve* točke osebe do *druge* točke osebe. Za vsako *drugo* osebo naj bodo povezave s kapaciteto 1 natanko do tistih pijač, ki jih ima ta oseba rada. Nazadnje naj gredo od vseh pijač povezave s kapacitetami w_i do točke t (za vsako vrsto pijače ustrezna kapaciteta).

Sedaj je enostavno sklepati, da željena razdelitev hrane in pijače obstaja natanko tedaj, ko ima maksimalni (s, t)-tok v prirejenem grafu vrednost enako številu udeležencev.

b) V prirejenem grafu lahko najdemo minimalni prerez vrednosti 5, določen s točkami: s, Pohanček, Šoferski, Damir$_1$ in Bernard$_1$. Torej ne obstaja (s, t)-tok z vrednostjo 6, torej željena razdelitev hrane in pijač ne obstaja.

Odgovor na vprašanje: “Zakaj ni v redu, če vsako osebo modeliramo le z eno točko?” je v primeru iz točke b). Koliko je maksimalni (s, t)-tok, ki ga dobimo, če modeliramo le z eno točko za vsako osebo in zakaj nam to ni všeč?