Operacijske raziskave (FM): 1. kolokvij

25. november 2010

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 110 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

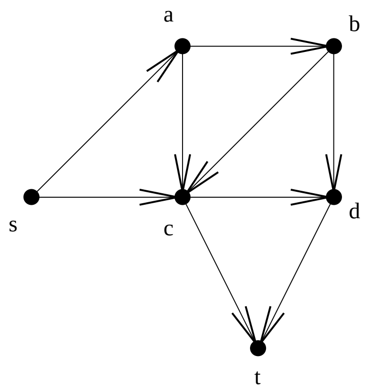
a) (5 točk) Dokaži, da za poljubni konstanti $a, b \in \mathbb{R}$, kjer je $b > 0$, velja $(n + a)^b = O(n^b)$.

b) (5 točk) Naj bo f naraščajoča funkcija. Ali velja $g(n) = O(f(g(n)))$?

c) (10 točk) Dokaži, da če T zadošča pogoju $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) - 13$ za $n \geq 2$, potem je $T(n) = O(n)$.

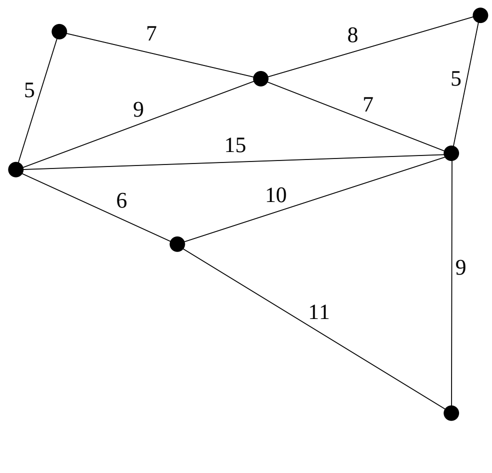
2. naloga (25 točk)

Napiši psevdokodo algoritma, ki v acikličnem usmerjenem grafu prešteje število poti od dane točke s do vseh točk grafa. Algoritem nato uporabi na naslednjem grafu:



3. naloga (25 točk)

Otoke na spodnji sliki želimo povezati z mostovi, tako da bo skupna cena gradnje čim manjša. Cena gradnje mostu je milijon evrov na kilometer (razdalje v kilometrih so označene na sliki; na povezavah, ki niso narisane, zaradi tehničnih preprek ne moremo zgraditi mostov). Med katerimi otoki naj zgradimo mostove? Pri iskanju odgovora uporabi primeren algoritem in zapiši vse vmesne rezultate. Kakšen je odgovor, če je za vsak zgrajeni most potrebno dobiti potrdilo inšpektorjev, ti pa za vsak pregled zaračunajo milijon evrov?

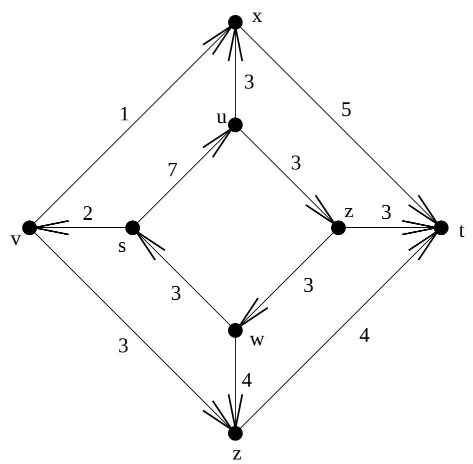


4. naloga (40 točk)

Nov in neizkušen predavatelj Operacijskih raziskav se odloči, da bo poenostavil Ford-Fulkersonov algoritem. Študentom pove, da naj za iskanje maksimalnega pretoka na omrežju s končnimi kapacitetami uporabijo naslednji algoritem:

Greedyflow(G, u, s, t):
    za vsako povezavo e v G
        $f(e) \leftarrow 0$
    dokler obstaja pot od s do t
        $P \leftarrow$ poljubna pod od s do t
        $\gamma \leftarrow$ minimalna kapaciteta povezav poti P
        za vsako povezavo e v P
            $f(e) \leftarrow f(e) + \gamma$
            če $u(e) = \gamma$
                odstrani e iz G
            sicer
                $u(e) \leftarrow u(e) - \gamma$
    vrni f

a) (15 točk) Dokaži, da na naslednjem grafu z uporabo algoritma Greedyflow lahko dobimo pravilno rešitev.



b) (15 točk) Poišči primer omrežja in izbire poti, tako da algoritem Greedyflow ne da pravilnega rezultata.

c) (dodatna naloga, 5 točk) Ali za vsako omrežje obstaja taka izbira poti, da bo algoritem Greedyflow dal maksimalni pretok?

d) (dodatna naloga, 5 točk) Dokaži, da je razlika med maksimalnim pretokom in pretokom, ki ga vrne algoritem Greedyflow, lahko poljubno velika.