Ford-Fulkersonov algoritem

Vhod: omrežje (G, u, s, t).

Izhod: (s,t)-pretok z največjo vrednostjo.

① Naj bo $f(e) := 0$ za $\forall e \in E(G)$.

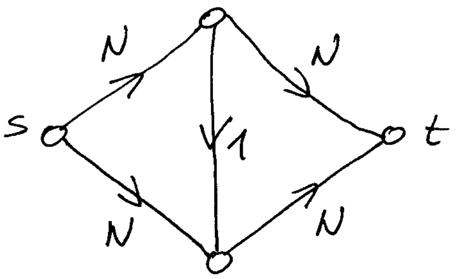
② Poišči povečujočo pot P v pridruženem omrežju. Če poti ni, končaj.

③ Izračunaj $\gamma := \min_{e \in E(P)} u_f(e)$. tesne povezave bottleneck edges

Povečaj f vzdolž P za γ in se vrni na korak ②.

Opomba. Načeloma lahko korak ② opravimo s polnim pregledom pridruženega grafa.

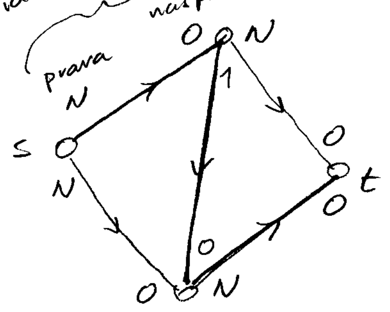
Zgled. Če "nerodno" izbiramo, je ponovitev lahko zelo veliko.



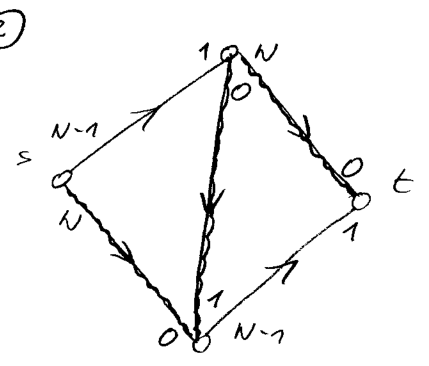
pridruženi kapaciteti

nasprotna

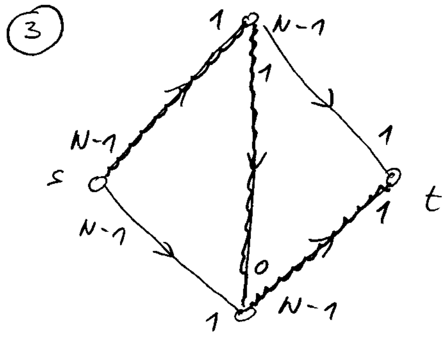
prava



gremo po pov. poti in prenesemo z "vhoda" na "izhod"



Rečimo, da bo povečujoča pot vedno vsebovala navpično povezavo



o o o

2N korakov

Opomba.
Če iracionalne uteži, se lahko nikoli ne konča.

"V resnici ne navedi pretoka po pov. poti, le po delih, "preskakanje"."

utemelji pravilnost "algoritma"

Izrek.

(s,t)-pretok f je maksimalen $\Leftrightarrow$ ne obstaja povečujoča pot

Dokaz.

($\Rightarrow$) Naj bo pretok maksimalen. Če bi obstajala povečujoča pot, bi ga lahko povečali, protislovje.

($\Leftarrow$) Recimo, da ne obstaja povečujoča pot. Potem točka t ni dosegljiva iz s v G_f. Naj bo A množica točk, ki so v G_f dosegljive iz s. Po definiciji G_f je $f(e)=u(e)$ za $\forall e \in \delta^+_G(A)$ in $f(e)=0$ za $\forall e \in \delta^-_G(A)$.

povezave e ni v G_f — nasprotne povezave od e ni v G_f

Po lemi je

$$\mathrm{value}(f) = \sum_{e\in\delta^+_G(A)} \underbrace{f(e)}_{u(e)} - \sum_{e\in\delta^-_G(A)} \underbrace{f(e)}_{0}.$$

Je maksimalni pretok po lemi (b).

Pove tudi, kako dobimo prerez.

$\square$

Posledica (Max-Flow-Min-Cut Theorem).

Ford, Fulkerson 1956; Elias, Feinstein, Shannon 1956

V vsakem omrežju je vrednost maksimalnega (s,t)-pretoka enaka kapaciteti minimalnega (s,t)-prereza.

Posledica.

Če so vse kapacitete v omrežju cela števila, potem obstaja celoštevilski maksimalni pretok.

Sledi iz postopka. Za cela števila se vedno izteče v končno mnogo korakih.

Dekompozicija toka

Trditev.

Naj bo (G,u,s,t) omrežje in f (s,t)-tok. Potem obstaja taka družina (s,t)-poti $\mathcal{P}$ in taka družina ciklov $\mathcal{C}$ v G ter take uteži $w: \mathcal{P}\cup\mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$, da velja:

(i) $$f(e) = \sum_{P\in\mathcal{P}\cup\mathcal{C}:\, e\in E(P)} w(P), \quad \forall e\in E(G)$$ imamo dekompozicijo toka

(ii) $$|\mathcal{P}|+|\mathcal{C}| \leq |E(G)|$$ družini nista preveliki

Skica dokaza.

"nosilec" toka f

Dokazujemo z indukcijo po moči množice $E_f := \{e\in E(G) \mid f(e)>0\}$.

Če je $|E_f|=0$, potem je $f\equiv 0$. Vzamemo $\mathcal{P}=\mathcal{C}=\emptyset$.

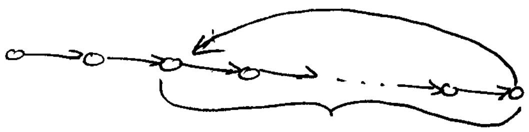
Indukcijski korak: Vzamemo povezavo $e\in E_f$ in konstruiramo zaporedje povezav.

$\circ \xrightarrow{e} \circ$ pogledamo za izhodno povezavo iz E_f

Če obstaja, z njo podaljšamo zaporedje povezav. Postopek ponavljamo, dokler se ne zgodi ena od naslednjih možnosti:

- konica te zadnje dodane povezave ni začetek nobene povezave iz E_f. V tem primeru je konica te zadnje dodane povezave ravno t.
- konica te zadnje dodane povezave je že krajišče ene od povezav v zaporedju. V zaporedju dobimo cikel C.

Cikel dodamo v $\mathcal{C}$,



za $w(C)$ pa določimo $\underbrace{\min\{f(e)\mid e\in E(C)\}}_{\gamma} > 0$.

Na C f zmanjšamo za γ; novi tok ima manjši nosilec, na njem uporabimo I.P.

Če pri gradnji zaporedja nismo dobili cikla, ampak smo končali v tč t, postopek v "obratni" smeri ponovimo še iz začetka pov. e. Če dobimo cikel, storimo enako kot v prejšnjem primeru. Sicer dobimo (s,t)-pot. Tudi za njo določimo γ, jo dodamo v $\mathcal{P}$, na njej zmanjšamo tok za γ in uporabimo indukcijo.

(Ker se za vsako pot oz. cikel nosilec zmanjša vsaj za eno povezavo, tč (ii) velja.) $\boxtimes$

Opomba. Če je f celoštevilski, lahko tudi uteži w izberemo celoštevilske.

Opomba. Za vsako dekompozicijo, ki ustreza (i), velja

$$\text{value}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} w(P).$$

Vrednost toka zapišemo po definiciji in ustavimo tč (i). Vsaka pot vsebuje natanko eno povezavo iz $\delta^+(s)$, vsak cikel pa bodisi nobene povezave iz $\delta^+(s) \cup \delta^-(s)$ bodisi natanko eno pov. iz $\delta^+(s)$ in natanko eno pov. iz $\delta^-(s)$.

Opomba. Vedno lahko najdemo maksimalni tok, kjer je $\mathcal{C} = \emptyset$.

Opomba. Če je f krožni tok, potem je pri vsaki dekompoziciji $\mathcal{P} = \emptyset$.

Opomba. Podobno dekompozicijo lahko naredimo tudi tedaj, ko je f (s,t)-predtok. Poleg (s,t)-poti moramo v tem primeru v $\mathcal{P}$ dopustiti tudi poti, ki se začno v s in končajo v točkah s pozitivnim presežkom.

Izboljšava Edmondsa in Karpa

↳ zagotovi majhno število ponovitev zanke (2)-(3)

Ko v koraku (2) Ford-Fulkersonovega algoritma iščemo povečujočo pot, izberemo povečujočo pot, ki vsebuje najmanj povezav.

Poiščemo jo npr. s pregledom v širino.

Lema.

Naj bo $f_1, f_2, \ldots$ zaporedje pretokov, pri čemer f_{i+1} dobimo iz f_i s spremembo vzdolž poti P_i, kjer je P_i najkrajša f_i-povečujoča pot. Potem velja:

(a) $|E(P_i)| \leq |E(P_{i+1})|, \forall i$

(b) $|E(P_i)| + 2 \leq |E(P_j)|$ za vse tiste $i < j$, za katere $P_i \cup P_j$ vsebuje par nasprotnih povezav.

Dokaz.

(a) Naj bo G_1 graf, sestavljen iz disj. unije pov. $E(P_i)$ in $E(P_{i+1})$, iz katere odstranimo pare nasprotnih povezav.
Če kaka povezava nastopa v P_i in v P_{i+1}, imamo v G_1 dve kopiji.

Velja: če $e \in E(G_1)$, potem tudi $e \in E(G_{f_i})$. (*)

↳ vsaka povezava iz $E(G_{f_{i+1}}) \setminus E(G_{f_i})$ (v G_1 morda dve kopiji) je nasprotna povezava neke povezave iz $E(P_i)$, pretok se spreminja samo po pov. poti.

Lahko razbijemo na po pov. disj. cikle.

V G_1 dodamo dve povezavi od t do s in dobimo usm. graf, v katerem imajo vse točke vhodno stopnjo enako izhodni. Potem pa v tem grafu obstajata dve po povezavah disj. (s,t)-poti Q_1 in Q_2. Obe poti sta zaradi (*) tudi f_i-povečujoči.

Ker je P_i najkrajša f_i-povečujoča pot, velja $|E(P_i)| \le |E(Q_1)|$ in $|E(P_i)| \le |E(Q_2)|$. Zato je

$$2|E(P_i)| \le |E(Q_1)| + |E(Q_2)| \le |E(G_1)| \le |E(P_i)| + |E(P_{i+1})|.$$

Torej $|E(P_i)| \le |E(P_{i+1})|$.

(b) Po (a) zadošča obravnavati le pare, kjer vmesni z zadnjim ne naredijo para nasprotnih povezav.

Zopet konstruiramo G_1 iz disj. unije P_i in P_j. Spet velja: $e \in E(G_1) \Rightarrow e \in E(G_{f_i})$.

Vsaka iz $E(G_{f_j}) \setminus E(G_{f_i})$ je nasprotna eni od povezav iz nekega G_{f_k}, $k = i, i+1, \dots, j-1$. Po predp. mora biti $k = i$.

Zopet v G_1 dodamo dve povezavi od t do s in dobimo dve povezavno disj. (s,t)-poti Q_1 in Q_2. Obe sta f_i-povečujoči, torej $|E(Q_1)| \ge |E(P_i)|$ in $|E(Q_2)| \ge |E(P_i)|$.

Zato je

$$2|E(P_i)| \le |E(Q_1)| + |E(Q_2)| \le |E(P_i)| + |E(P_j)| - 2$$

vsaj 2 pvz smo odstranili

□

Izrek (Edmonds, Karp 1972).

Postopek Forda in Fulkersona, pri katerem izbiramo najkrajše povečujoče poti, opravi $\le \frac{m \cdot n}{2}$ povečanj ($m := |E(G)|$, $n := |V(G)|$).

Opomba. Prvi polinomski postopek za iskanje maksimalnega pretoka.

Dokaz.

Naj bodo $P_1, P_2, \ldots$ povečujoče poti, ki jih izbere algoritem. Vsaka od teh poti vsebuje vsaj eno temo povezavo (po ③).

Naj bodo $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots$ poti, ki kot temo povezavo vsebujejo pač povezavo e. Potem med P_{i_j} in $P_{i_{j+1}}$ obstaja povečuj. pot P_k ($i_j < k < i_{j+1}$), ki vsebuje k e nasprotno povezavo.

tu izgine, vmes se mora spet pojaviti

Po točki (b) iz leme je

$$|E(P_{i_j})| + 4 \le |E(P_k)| + 2 \le |E(P_{i_{j+1}})|, \quad j = 1, 2, \ldots$$

3, če e ni pri s,t

Ker je ~~1~~ $\le |E(P_{i_j})| \le n-1$, obstaja $\le \lceil \frac{n}{4} \rceil$ $\frac{n}{4}$ povečujočih poti, ki vsebujejo e kot temo povezavo. Če je $n \geq 4$, ocena velja tudi za povezave pri s,t.

Ker vsaka povečujoča pot vsebuje vsaj eno temo povezavo, je v zaporedju kvečjemu $\underbrace{|E(\overleftrightarrow{G})|}_{2m} \cdot \lceil \frac{n}{4} \rceil \doteq \frac{mn}{2}$ povečujočih poti.

lahko izpustimo pri $n \geq 4$

Za $n = 2, 3$ pogledamo posebej. $\square$

Opomba.

Maksimalni pretok lahko poiščemo v času $O(m^2 n)$.

$\frac{mn}{2}$ iteracij, vsaka $O(m)$ za BFS

Galil 1978 $O(n^{5/3} m^{2/3})$

Sleator 1980 $O(nm \log n)$

Drugačni pristopi ("preflow-push")

zgornja meja za kapacitete

$O(n^2 m)$ $\underline{O(n^3)}$, $O(n^2 \sqrt{m})$, $O(nm + n^2 \log U)$

Goldberg, Tarjan 1988