MAKSIMALNI PRETOK
(maximum flow)

Naj bo G usmerjen graf, $u: E(G) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ utežna funkcija.

kapacitete, tudi zmogljivost
povezav prepustnost

Vzemimo $f: E(G) \to \mathbb{R}$.

omejenost f z u: $0 \leq f(e) \leq u(e)$ za $\forall e \in E(G)$

Def.

$$ex_f(u) := \sum_{e \in \delta^-(u)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(u)} f(e)$$ presežek f v točki $u \in V(G)$

(excess)

$\delta^-(u)$ ← vhodne povezave v to u

$\delta^+(u)$ ← izhodne povezave iz to u

Če velja $ex_f(u) = 0$, pravimo, da se f v točki u ohrani.

Def.

$f: E(G) \to \mathbb{R}$ je krožni tok v omrežju (G, u), če (circulation) je f omejen z u in se f ohrani v vsaki tč grafa G.

(To pomeni: $0 \leq f(e) \leq u(e)$, $\forall e \in E(G)$ in $ex_f(u) = 0$, $\forall u \in V(G)$.)

Def.

Naj bo $s, t \in V(G)$: $s \neq t$.

s ← izvor (source), t ← ponor (sink)

f je (s,t)-tok, če velja:

(a) f je omejen z u

(b) $ex_f(u) = 0$ za $\forall u \in V(G) \setminus \{s,t\}$

(c) $ex_f(s) \leq 0$ ← teče od s proti t

f je (s,t)-predtok, če velja:

(a) f je omejen z u

(b) $ex_f(u) \geq 0$, $\forall u \in V(G) \setminus \{s,t\}$

(c) $ex_f(s) \leq 0$

Pri toku v "notranjih" tč velja ohranitev, pri predtoku je lahko pozitiven presežek.

Očitno velja: krožni tok $\subseteq$ tok $\subseteq$ predtok

Def. vrednost (s,t)-toka f

$$\mathrm{value}(f) := -ex_f(s) = \sum_{e\in\delta^+(s)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(s)} f(e)$$

Naloga maksimalnega pretoka:

Dano je omrežje (G,u), točki $s,t\in V(G)$: $s\neq t$. Iščemo (s,t)-tok z največjo vrednostjo.

Opomba. Gre za posebno vrsto linearnih programov. Vedno imajo dopustno rešitev ($f\equiv 0$ npr.) in niso nikoli neomejeni ($u(e)\in\mathbb{R}$), zato vedno dobimo optimalno rešitev.

Opomba. Recimo, da znamo rešiti nalogo maksimalnega pretoka. Kaj storiti, če so v vhodnem omrežju tudi povezave s kapaciteto neskončno?

Najprej pogledamo podgraf, ki vsebuje samo povezave s kapaciteto ∞. Če v njem obstaja pot od s do t, potem je naloga neomejena (navzgor, seveda). Sicer vse kapacitete ∞ zamenjamo z dovolj veliko vrednostjo (npr. vsota kapacitet vseh povezav iz $\delta^+(s)$ zadošča; noben tok nima večje vrednosti od tega števila). V tako spremenjenem omrežju poiščemo maksimalni pretok. Ta je potem rešitev zastavljene naloge.

Lema.

Naj bo $A \subseteq V(G)$: $s \in A$, $t \notin A$, in f (s,t)-tok.

Potem velja:

(a) $$\text{value}(f) = \sum_{e \in \delta^+(A)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(A)} f(e)$$

(b) $$\text{value}(f) \leq \sum_{e \in \delta^+(A)} u(e)$$

Opomba. $$\delta^+(A) := \{\vec{uv} \in E(G) \mid u \in A, v \notin A\}$$ povezave, ki se začno v A in končajo zunaj A

Dokaz.

Za vsako točko $v \in A \setminus \{s\}$ velja ohranitev toka. Zato je

$$\text{value}(f) = \sum_{e \in \delta^+(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f(e)$$

$$= \sum_{v \in A} \left(\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) \right)$$

prištejemo člene $ex_f(v)$, ki so enaki 0

$$= \sum_{e \in \delta^+(A)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(A)} f(e)$$

povezave z obema krajiščema v A nastopijo v enem δ^+ in v enem δ^-, tako da se njihov f odšteje; ostanejo povezave, ki imajo eno krajišče v A, drugo pa zunaj A

Točka (b):

$$\text{value}(f) \overset{(a)}{=} \underbrace{\sum_{e \in \delta^+(A)} f(e)}_{\leq u(e)} - \underbrace{\sum_{e \in \delta^-(A)} f(e)}_{\geq 0} \leq \sum_{e \in \delta^+(A)} u(e)$$

upoštevamo omejenost f z u

$\square$

Def.

Vsako množico povezav, ki je oblike $\delta^+(X)$ za množico $X \subseteq V(G)$: $s \in X$, $t \notin X$, imenujemo (s,t)-prerez.

Opomba.

Če je $F \subseteq E(G)$ (s,t)-prerez, potem graf $G-F$ ne vsebuje nobene (s,t)-poti. "F prereže graf v smeri od s proti t"

Def. kapaciteta prereza

F prerez, njegova kapaciteta je $\sum_{e \in F} u(e)$ vsota kapacitet posameznih povezav iz prereza

Opomba.

Po točki (b) iz leme je vrednost vsakega (s,t)-toka navzgor omejena s kapaciteto vsakega (s,t)-prereza.

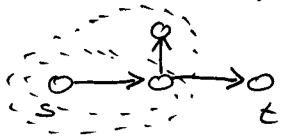
Komentar definicije prereza:

V literaturi pogosto definirajo "posplošeni" prerez na naslednji način: posplošeni (s,t)-prerez je vsaka množica povezav $F \subseteq E(G)$, za katero graf $G-F$ ne vsebuje nobene (s,t)-poti.

- Vsak naš prerez je seveda tudi "posplošeni" prerez. Obrat ne velja.
- Za vsak "posplošeni" (s,t)-prerez F obstaja pravi (s,t)-prerez $F' \subseteq F$:

  Naj bo A množica točk, ki so v $G-F$ dosegljive iz s. Potem vzamemo $F' := \delta^+(A)$.

  Vsak glede na vsebovanost povezav minimalni posplošeni prerez je torej pravi prerez.
- Če so kapacitete > 0, potem je vsak minimalni (glede na kapaciteto) posplošeni (s,t)-prerez pravi (s,t)-prerez.



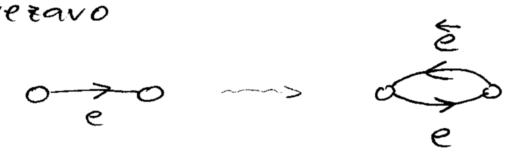
G usmerjeni graf

$\overleftrightarrow{G}$ <u>pridruženi graf</u>

$$V(\overleftrightarrow{G}) := V(G)$$

$$E(\overleftrightarrow{G}) := E(G) \cup \{ \overleftarrow{e} \mid e \in E(G) \}$$

za vsako povezavo dodamo nasprotno usmerjeno povezavo



e in $\overleftarrow{e}$ sta nasprotni povezavi

Če že v G par nasprotno usmerjenih povezav, dobimo vzporedne povezave.

G usmerjeni graf, u kapacitete, f omejen z u

samo pogoj (a), ni treba ohranitve

<u>pridruženo omrežje</u> G_f residual graph

$$\underset{\text{originalna}}{u_f(e)} := u(e) - f(e)$$

$$\underset{\text{nasprotna}}{u_f(\overleftarrow{e})} := f(e)$$

pridružene kapacitete — residual capacities

koliko lahko še povečamo

koliko lahko zmanjšamo na nasprotni

$$V(G_f) := V(G)$$

$$E(G_f) := \{ e \in E(\overleftrightarrow{G}) \mid u_f(e) > 0 \}$$

vzamemo le tiste povezave pridruženega grafa, ki imajo poz. pridruženo kapaciteto

<u>povečujoča</u> (tudi nezasičena) <u>pot</u> glede na omrežje (G,u), s,t, pretok f

(s,t)-pot v pridruženem omrežju — seveda usmerjena

f-augmenting path

Omogoča nam <u>povečati</u> pretok za najmanjšo pridruženo kapaciteto na poti

$e \in E(P)$ $\quad e \in E(G)$: povečamo na e

$e = \overleftarrow{e}_0,\ e_0 \in E(G)$: zmanjšamo na e_0

Zopet dobimo (s,t)-pretok: (a) očitno, (b) tudi (preverimo možnosti).

Pri s se vrednost pretoka poveča.

Preverimo, da res dobimo pretok:

(a) sledi iz def. kapacitet v pridruženem omrežju

(b) preverimo možnosti

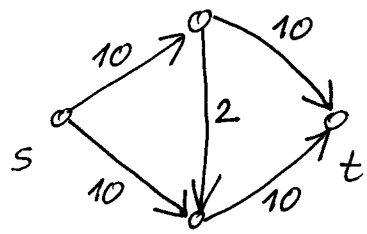
$\longrightarrow$ originalna
$\dashrightarrow$ nasprotna

$\longrightarrow\circ\longrightarrow$	povečamo na obeh, skozi tč teče več
$\longrightarrow\circ\dashrightarrow$	po eni več, po drugi manj pride; teče enako
$\dashrightarrow\circ\longrightarrow$	po eni manj, po drugi več odide; teče enako
$\dashrightarrow\circ\dashrightarrow$	zmanjšamo na obeh nasprotnih, skozi tč teče manj

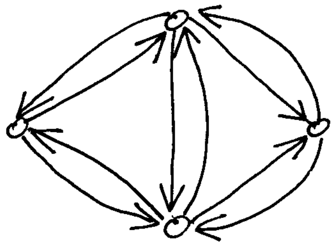
Vrednost pretoka se poveča:

$\underset{s}{\circ}\longrightarrow$	$\underset{s}{\circ}\dashrightarrow$
več steče iz s	manj se vrne vs, torej razlika večja

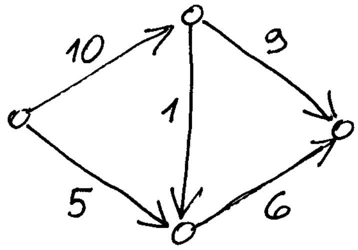
G, u vhodno omrežje



$\overleftrightarrow{G}$ pridruženi graf



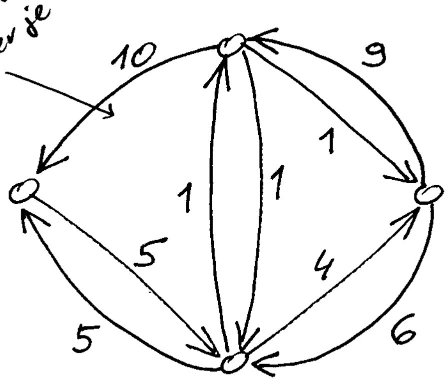
G, f (s,t)-tok



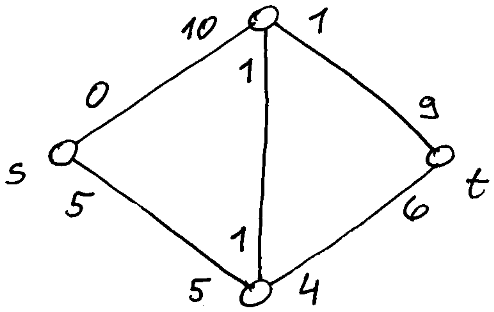
value$(f) = 15$

G_f pridruženo omrežje

ovig. povezava manjka, ker je zasičena



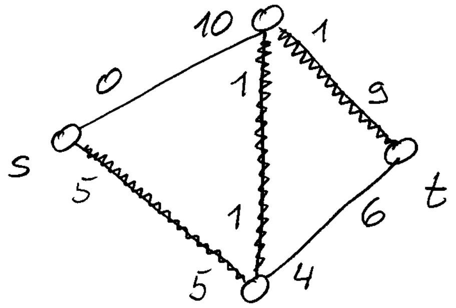
preprostejša risba pridruženega grafa s pridruženimi kapacitetami



Glede na originalno usmeritev povezave je na njenem koncu f, na začetku pa $u-f$.

povečujoča pot: "pot od s do t, ki na nobeno povezavo ne vstopi pri ničli"

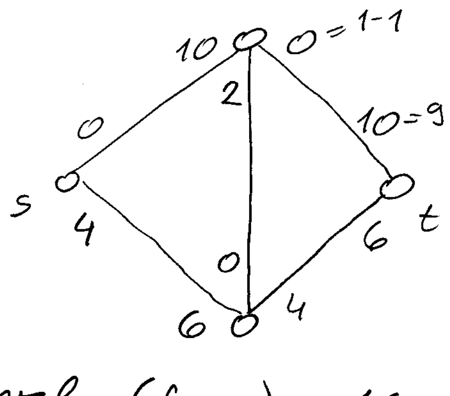
Sprememba vzdolž povečujoče poti za γ: gremo po poti, število na vstopni strani povezave zmanjšamo za γ, število na izstopni strani pa povečamo za γ.



povečujoča pot

$\gamma = 1$

navedimo spremembo



value$(f_{novi}) = 16$