

Optimizacijske metode, 4. domača naloga, 9. 12. 2008

(rok za oddajo: 16. 12. 2008 do 14²⁰h)

V mestu je q krajevnih skupnosti K_1, K_2, \dots, K_q in p političnih strank S_1, S_2, \dots, S_p . Mestni svet je sestavljen iz po enega predstavnika vsake krajevne skupnosti. Različne krajevne skupnosti morajo imeti različne predstavnike v mestnem svetu. Za mesto svetnika se potegujejo kandidati k_1, k_2, \dots, k_r . V vsaki krajevni skupnosti so se krajan na zboru že odločili, kateri kandidati so za njih sprejemljivi kot njihovi predstavniki in kateri ne. Vsak od kandidatov pripada natanko eni politični stranki.

Župan si želi, da bi bil mestni svet politično čim bolj uravnotežen, zato je število članov sveta, ki pripadajo posamezni politični stranki, omejeno: v svetu je lahko največ u_i članov stranke S_i , $i = 1, \dots, p$.

Kako naj županova kadrovska komisija sestavi mestni svet, da bo zadoščeno županovi želji po politični uravnoteženosti mestnega sveta? Ali je županovi želji vedno moč ustreči?

- (a) Predstavi gornji problem kot problem maksimalnega pretoka skozi omrežje. Torej, treba je opisati primerno omrežje (G, s, t, u) in utemeljiti, da v tem omrežju obstaja (s, t) -tok z dano vrednostjo (katero?) od točke s do točke t natanko tedaj, ko je mogoče pravilno razporediti kandidate v mestni svet. Opiši tudi, kako iz rešitve problema maksimalnega pretoka odčitamo predstavnike krajevnih skupnosti v mestnem svetu.
- (b) Nariši omrežje, opisano v prejšnji točki, za naslednje podatke. Mesto je razdeljeno na štiri krajevne skupnosti K_1, K_2, K_3, K_4 , v njem pa delujejo tri politične stranke S_1, S_2, S_3 . Za mestne svetnike se potegujejo Andrej, Borut, Cvetka, Damjan, Eva, Franci in Grega. V mestnem svetu sta lahko največ po dva člana iste stranke. Podatki o članstvu v političnih strankam in o sprejemljivosti posameznih kandidatov za krajevne skupnosti so podani v spodnji tabeli:

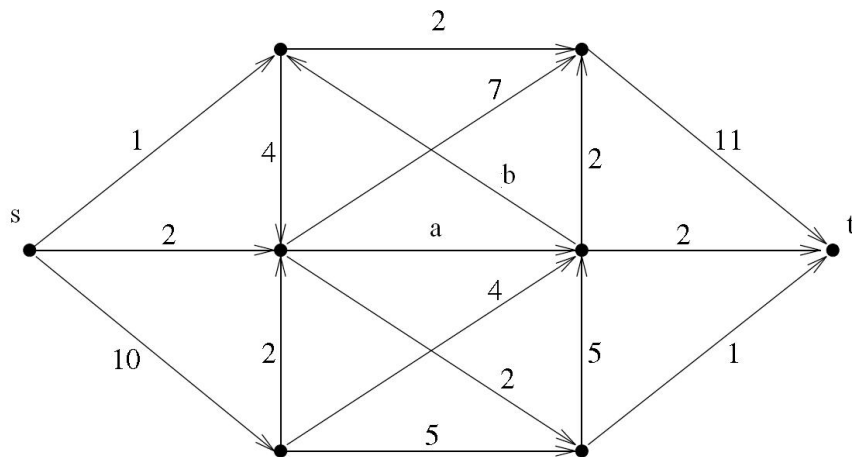
kandidat	sprejemljiv za	član
Andrej	K_1	S_1
Borut	K_1, K_2	S_1
Cvetka	K_2	S_2
Damjan	K_2, K_3, K_4	S_2
Eva	K_3, K_4	S_2
Franci	K_4	S_3
Grega	K_4	S_3

- (c) Reši problem maksimalnega pretoka iz prejšnje točke (začetno rešitev, ki je lahko optimalna, lahko uganeš) in iz rešitve razberi, kdo bo postal mestni svetnik in koga bo zastopal.

Operacijske raziskave, 2. naloga

11. november 2009

Ameriško finančno ministrstvo želi izvesti novi "bailout" banke Goldman Sucks. Tako ji želi nakazati čim več milijard dolarjev. Ker bi direktno nakazilo povzročilo buren odziv javnosti, mora finančni minister dobro premisliti, preko katerih posredniških ustanov bo izvedeno plačilo. Spodaj je prikazan graf, v katerem točka s predstavlja ameriško finančno ministrstvo, točka t banko Goldman Sucks, medtem ko ostale točke predstavljajo možne posrednike. Povezava med dvema točkama predstavlja zgornjo mejo nakazanega denarja v milijardah dolarjev, za katero je znano, da ne bo vzbudila pretirane pozornosti. Za povezavi označeni z a ter z b ni znano, kakšna je zgornja meja.



1. Trenutna zakonodaja sicer ni jasna, a je gotovo, da vrednosti $a = 1$ in $b = 2$ ne bi smele vzpodbuditi pretiranega negativnega odziva javnosti. Za takšne okoliščine poišči maksimalno vrednost, ki jo lahko ameriško finančno ministrstvo posredno nakaže banki.
2. Banka Goldman Sucks krvavo potrebuje vsak cent, a ameriška vlada v težkih časih ni pripravljena tvegati nasprotovanja javnosti. Toda kongres lahko sprejme zakon, s katerim se lahko transakciji, pripadajoči povezavama s cenama a in b , legalno definirata. Pričakovanje je, da bo kongres sprejel omejitvi $a = 1$ in $b = 2$, za višje vrednosti, pa bi bilo potrebno angažirati lobiste. Lobiranje pri kongresnikih pa ni ravno poceni. Lobisti banke Goldman Sucks ocenjujejo, da bi zvišanje katere koli izmed mej a ali b stalo milijon dolarjev na vsako zvišano milijardo. Najmanj koliko denarja je potrebno vložiti v lobiranje in kakšne vrednosti omejitev a in b je potrebno doseči, da bo lahko ameriško finančno ministrstvo preko posrednikov nakazalo banki Goldman Sucks kar največ denarja.

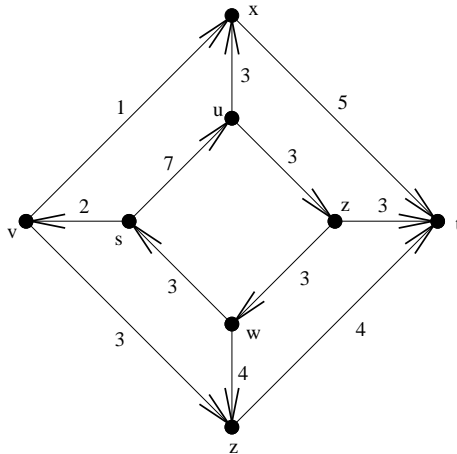
Če se pri nalogah odločiš probleme modelirati s pomočjo kakega znanega problema in pri tem uporabiti ustrezen algoritem, je potrebno izbiro utemeljiti.

4. naloga (40 točk)

Nov in neizkušen predavatelj Operacijskih raziskav se odloči, da bo poenostavil Ford-Fulkersonov algoritem. Študentom pove, da naj za iskanje maksimalnega pretoka na omrežju s končnimi kapacitetami uporabijo naslednji algoritem:

```
GREEDYFLOW( $G, u, s, t$ ):  
  za vsako povezavo  $e$  v  $G$   
     $f(e) \leftarrow 0$   
  dokler obstaja pot od  $s$  do  $t$   
     $P \leftarrow$  poljubna pot od  $s$  do  $t$   
     $\gamma \leftarrow$  minimalna kapaciteta povezav poti  $P$   
    za vsako povezavo  $e$  v  $P$   
       $f(e) \leftarrow f(e) + \gamma$   
      če  $u(e) = \gamma$   
        odstrani  $e$  iz  $G$   
      sicer  
         $u(e) \leftarrow u(e) - \gamma$   
  vrni  $f$ 
```

a) (15 točk) Dokaži, da na naslednjem grafu z uporabo algoritma GREEDYFLOW lahko dobimo pravilno rešitev.



b) (15 točk) Poišči primer omrežja in izbire poti, tako da algoritem GREEDYFLOW ne da pravilnega rezultata.

c) (dodatna naloga, 5 točk) Ali za vsako omrežje obstaja taka izbira poti, da bo algoritem GREEDYFLOW dal maksimalni pretok?

d) (dodatna naloga, 5 točk) Dokaži, da je razlika med maksimalnim pretokom in pretokom, ki ga vrne algoritem GREEDYFLOW, lahko poljubno velika.