1. naloga [15 točk]

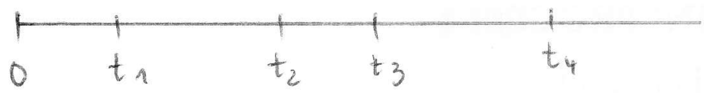
Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Naj bo $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ in naj bo $N(t_i, t_j)$ število skokov procesa N_t na časovnem intervalu $(t_i, t_j]$.

(4) (a) Določite porazdelitev in upanje $N(t_1, t_2)$.

(4) (b) Izračunajte $E\big(N(t_1, t_2) \cdot N(t_3, t_4)\big)$.

(7) (c) Izračunajte $E\big(N(t_1, t_3) \cdot N(t_2, t_4)\big)$. Rezultat poenostavite.

(a)



$N(t_i, t_j) = N_{t_j} - N_{t_i}$ 2

$\Rightarrow N(t_1, t_2) = N_{t_2} - N_{t_1} \sim N_{t_2 - t_1} \sim \text{Pois}(\lambda(t_2 - t_1))$ 1

$\Rightarrow E(N(t_1, t_2)) = \lambda(t_2 - t_1)$ 1

(b) $E(N(t_1, t_2) \cdot N(t_3, t_4)) = E(N(t_1, t_2)) \cdot E(N(t_3, t_4)) =$ 1

disjunktna intervala
$\Rightarrow$ neodvisni spremenljivki 2

$= \lambda(t_2 - t_1) \cdot \lambda(t_4 - t_3) = \lambda^2 (t_2 - t_1)(t_4 - t_3)$ 1

(c) $E\big(N(t_1, t_3) \cdot N(t_2, t_4)\big) =$ razbijemo na disjunktne intervale in nato uporabimo neodvisnost

$= E\Big(\big(N(t_1, t_2) + N(t_2, t_3)\big) \cdot \big(N(t_2, t_3) + N(t_3, t_4)\big)\Big) =$ 2

$= E\Big(N(t_1, t_2) N(t_2, t_3) + N(t_2, t_3)^2 + N(t_1, t_2) N(t_3, t_4) + N(t_2, t_3) N(t_3, t_4)\Big)$

$= E\big(N(t_1, t_2) N(t_2, t_3)\big) + E\big(N(t_2, t_3)^2\big) + E\big(N(t_1, t_2) N(t_3, t_4)\big) +$

$+ E\big(N(t_2, t_3) N(t_3, t_4)\big) = (*)$

2

$$E\left(N(t_2,t_3)^2\right) = D\left(N(t_2,t_3)\right) + E\left(N(t_2,t_3)\right)^2 =$$

$$\uparrow$$

$$\text{Pois}\left(\lambda(t_2,t_3)\right) \qquad = \lambda(t_3-t_2) + \lambda^2(t_3-t_2)^2 \quad 1$$

$$(*) = \underline{\lambda(t_2-t_1)\lambda(t_3-t_2)} + \lambda(t_3-t_2) + \lambda^2(t_3-t_2)^2 +$$

$$+ \underline{\lambda(t_2-t_1)\lambda(t_4-t_3)} + \lambda(t_3-t_2)\lambda(t_4-t_3) = \quad 1$$

$$= \lambda^2(t_2-t_1)\left[\cancel{t_3} - t_2 + t_4 - \cancel{t_3}\right] + \lambda^2(t_3-t_2)\left[\cancel{t_3} - t_2 + t_4 - \cancel{t_3}\right] +$$

$$+ \lambda(t_3-t_2) =$$

$$= \lambda^2(t_4-t_2)(\cancel{t_2} - t_1 + t_3 - \cancel{t_2}) + \lambda(t_3-t_2) =$$

$$= \lambda^2(t_4-t_2)(t_3-t_1) + \lambda(t_3-t_2) \quad 1$$

2. naloga [15 točk]

Znana spletna stran je v trenutku 0 objavila pričakovano odmevno novico. Privzemite, da spletni deskarji stran obiskujejo skladno z nehomogenim Poissonovim procesom s trenutno intenzivnostjo

$$\rho(t) = \frac{M}{(t+1)^2}, \quad t \geqslant 0,$$

kjer čas t merimo v minutah in je $M > 0$ znana konstanta. Privzemite še, da vsak deskar novico prebira 5 minut, nato pa spletno stran zapusti.

(7) (a) Naj bo X_t število deskarjev, ki v trenutku $t \geqslant 0$ prebirajo novico. Določite porazdelitev in upanje spremenljivk X_4 in X_9.

(5) (b) Naj P_t označuje verjetnost, da v trenutku t nihče ne prebira novice. Izračunajte P_t.

Nasvet: Obravnavajte pri različnih t.

(3) (c) Izračunajte $\lim_{t\to\infty} P_t$.

Nehomogen Poissonov proces, $\rho(t) = \dfrac{M}{(t+1)^2}$

(a) $X_4 = \underbrace{\text{število gledalcev 4 minute po objavi}}$

Ker strani nihče še ni zapustil, je to enako številu prihodov obiskovalcev 1

$$\Rightarrow X_4 = N_4 \sim \text{Pois}\left(\int_0^4 \rho(t)\,dt\right)$$

$$\int_a^b \frac{M}{(t+1)^2}\,dt = -\frac{M}{t+1}\Bigg|_a^b = \left(-\frac{M}{b+1} + \frac{M}{a+1}\right) = M\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}\right) =$$

$$= M\,\frac{b+1-a-1}{(a+1)(b+1)} = \frac{M(b-a)}{(a+1)(b+1)} \quad 1$$

$$\Rightarrow N_4 \sim \text{Pois}\left(\frac{4M}{1\cdot(4+1)}\right) \; 1, \quad E(N_4) = \frac{4M}{5} \; 1$$

$a=0,\ b=4$

$X_9 = \underbrace{\text{število gledalcev 9 minut po objavi}}$

upoštevamo, da so tisti, ki so prišli do 4. minute, stran že zapustili 1

$$X_9 = N_9 - N_4 \sim \mathrm{Pois}\left(\int_4^9 \rho(t)\,dt \right) = \mathrm{Pois}\left(\frac{M(9-4)}{(4+1)(9+1)} \right)$$ 1

$a = 4$
$b = 9$

$$\Rightarrow E(X_9) = \frac{5M}{50} = \frac{M}{10}$$ 1

(b) za $t \in [0,5]$ je $X_t \sim N_t \sim \mathrm{Pois}\left(\int_0^t \rho(t)\,dt \right) = \mathrm{Pois}\left(\frac{Mt}{t+1} \right)$ 1

$a = 0$
$b = t$

$$\Rightarrow P(X_t = 0) = e^{-\frac{Mt}{t+1}} = P_t$$ 1

za $t > 5$ je $X_t \sim N_t - N_{t-5} \sim \mathrm{Pois}\left(\int_{t-5}^{t} \rho(t)\,dt \right) =$

$$= \mathrm{Pois}\left(\frac{5M}{(t+1)(t-4)} \right)$$ 2

$$\Rightarrow P(X_t = 0) = e^{-\frac{5M}{(t+1)(t-4)}} = P_t$$ 1

$$\Rightarrow P_t = \begin{cases} e^{-\frac{Mt}{t+1}} & ; \quad 0 \leq t \leq 5 \\ e^{-\frac{5M}{(t+1)(t-4)}} & ; \quad t > 5 \end{cases}$$

(c) $$\lim_{t \to \infty} P_t = \lim_{t \to \infty} e^{-\frac{5M}{(t+1)(t-4)}} = e^0 = 1$$ 1

2

(čez dovolj časa skoraj gotovo ne bo nihče več bral te novice)

3. naloga [20 točk]

Zaradi uvedbe davka na nepremičnine ste se odločili, da boste prodali stanovanje, ki ga ne potrebujete. Izklicne cene ne želite navesti, odločite pa se, da ga boste prodali prvemu kupcu, ki bo zanj ponudil vsaj 100 000 EUR. V trenutku 0 je izbrana nepremičninska agencija objavila oglas z vašim stanovanjem. Privzemite, da ponudbe kupcev prihajajo skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 0.5/dan. Zneski, ki so jih kupci pripravljeni plačati za stanovanje, so neodvisni od trenutka oddaje ponudbe in so porazdeljeni enakomerno na intervalu [80 000, 110 000] EUR.

(5) (a) Izračunajte matematično upanje števila ponudb, ki jih boste zavrnili do trenutka prodaje stanovanja. ↳ spremenljivka Y

(7) (b) Izračunajte pričakovani čas prodaje stanovanja. in njegovo disperzijo

(5) (c) Izračunajte pričakovano kupnino, ki jo boste prejeli ob prodaji stanovanja.

(3)

Prihajanje ponudb : homogeni Poissonov proces, $\lambda = \frac{1}{2}$ /dan

Zneski $C \sim U(80\,000, 110\,000)$

(a) Ponudbe predstavljajo Bernoullijevo zaporedje poskusov, dogodek se zgodi, če je ponudba ustrezna in se ne zgodi, če ponudba ni ustrezna 2

$P(\text{ponudba je ustrezna}) = P(C > 100\,000) = \frac{1}{3}$ 1

Naj bo X zaporedna številka prve ponudbe, ki je ustrezna

$\Rightarrow X \sim \text{Geom}(\frac{1}{3})$ 1

$\Rightarrow E(X) = 3$

Število zavrnjenih ponudb je $Y = X - 1$

$\Rightarrow E(Y) = 3 - 1 = 2$ 1

(b) Proces prihajanja ponudb markiramo z Bernoullijevo spremenljivko $I_j = \begin{cases} 1; & \text{ponudba ustrezna} \\ 0; & \text{ponudba neustrezna} \end{cases}$ 2

Skoki z oznako 1 predstavljajo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. 2

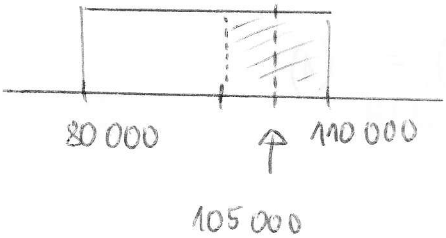
Čas prvega stoka v razredčenem procesu je $S_1^1 \sim Exp(\lambda_1)$

$\Rightarrow E(S_1^1) = \frac{1}{\lambda_1} = 6$ dni 1

$\Rightarrow D(S_1^1) = \frac{1}{\lambda_1^2} = 36$ dni^2 2

ⓒ Zanima nas $E(C \mid C \geq 100\,000) = \int_{100000}^{110000} \frac{\frac{1}{30\,000} \cdot t}{\int_{100000}^{110000} \frac{1}{30\,000}\, dx}\, dt =$ 2

1



$$= \int_{100\,000}^{110\,000} \frac{3}{30000}\, t\,dt =$$

$$= \frac{1}{10\,000} \left. \frac{t^2}{2} \right|_{100\,000}^{110\,000} =$$

$$= \frac{1}{20\,000} \left(110\,000^2 - 100\,000^2 \right) =$$

$= 105\,000$ EUR 2

Rezultat je pričakovan.

Naloga (b) z Waldovo enačbo:

$T = \sum_{i=1}^{X} T_j$; ker so T_j NEP $Exp(\lambda)$ in je J neodvisna od procesa, torej T_j

$\Rightarrow$ lahko uporabimo Walda

$$E(T) = E(X) \cdot E(T_j) = 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6 \quad (1)$$

$$D(T) = D(T_j) \cdot E(X) + E(T_j)^2 \cdot D(X)$$

upoštevamo $X \sim Geom(\frac{1}{3}) \Rightarrow E(X) = 3$

$$D(X) = \frac{1-\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{1} = 6$$

$T_j \sim Exp(\frac{1}{2}) \Rightarrow E(T_j) = 2$

$D(T_j) = 4$

$$D(T) = 4 \cdot 3 + 2^2 \cdot 6 = 12 + 24 = 36 \quad (2)$$

P(stanovanje prodano v roku enega tedna) =

$$= P(\underset{Exp(\frac{1}{6})}{S_1^1} \leq 7) = \int_0^7 \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}x} dx = -e^{-\frac{1}{6}x} \Big|_0^7 = -e^{-\frac{7}{6}} + 1 =$$

$$= 1 - e^{-7/6} =$$

$$= 68{,}86\,\% \quad 3$$

P(stanovanje prodano v roku 2 tednov) =

$$= 1 - e^{-14/6} = 90{,}3\%$$