Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 22. 8. 2011

Finančna matematika

1. Če Frančeve košnje trave pogledamo od trenutka čez 15 dni nazaj, le-te prav tako tvorijo homogen Poissonov proces z intenziteto ene košnje na 5 dni, le da mu moramo dodati še pravkaršnjo košnjo. Če torej z z A označimo čas zadnje košnje v prihodnjih 15 dneh, ima A isto porazdelitev kot $\min\{T, 15\}$, kjer je $T \sim \mathrm{Exp}(1/5)$ (slučajna spremenljivka A predstavlja *starost* Poissonovega procesa košenj). Torej velja:

$$\mathbb{E}(A) = \frac{1}{5}\int_0^{15} t\, e^{-t/5}\,\mathrm{d}t + \frac{15}{5}\int_{15}^{\infty} e^{-t/5}\,\mathrm{d}t = 5 - 5\,e^{-3}\,.$$

Višina trave je enaka $2A$, torej bo njena pričakovana vrednost enaka
$2\,\mathbb{E}(A) = 10 - 10\,e^{-3} \doteq 9{\cdot}50\,\mathrm{cm}$.

2. Velja $D = \max\{S_2, T_1\}$, kjer je S_2 čas, ko Stanka nabere drugega jurčka, T_1 pa je čas, ko Tone ujame svojo (edino) postrv. Slučajni spremenljivki S_2 in T_1 sta neodvisni, pri čemer je $S_2 \sim \mathrm{Gama}(2, 2)$ in $T_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$. Za $t > 0$ torej velja:

$$\begin{aligned} f_{S_2}(t) &= 4t\,e^{-2t}\,, & F_{S_2}(t) &= 1 - (2t+1)\,e^{-2t}\,, \\ f_{T_1}(t) &= e^{-t}\,, & F_{T_1}(t) &= 1 - e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} F_D(t) &= F_{S_2}(t)\,F_{T_1}(t) = 1 - e^{-t} - (2t+1)e^{-2t} + (2t+1)e^{-3t}\,, \\ f_D(t) &= e^{-t} + 4t\,e^{-2t} - (6t+1)e^{-3t}\,. \end{aligned}$$

3. a) Označimo z N_t število zamudnikov, ki pridejo do vključno časa t. Za $t \le s$ je torej $N_s - N_t$ število zamudnikov, ki pridejo z zamudo med t in s. Velja:

$$\begin{aligned} N_t &\sim \mathrm{Exp}\left(\int_0^t e^{-u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Exp}\big(1 - e^{-t}\big)\,, \\ N_s - N_t &\sim \mathrm{Exp}\left(\int_t^s e^{-u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Exp}\big(e^{-t} - e^{-s}\big)\,, \end{aligned}$$

poleg tega pa sta N_t in $N_s - N_t$ neodvisni. Definicijo lahko razširimo na $s = \infty$: $N_\infty - N_t$ je število vseh zamudnikov, ki zamudijo več kot t, in velja $N_\infty - N_t \sim \mathrm{Exp}(e^{-t})$.

Dogodek, da pride natanko en zamudnik in zamudi več kot dva meseca, lahko zapišemo kot:

$$A := \{N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1\}\,.$$

Zaradi neodvisnosti je njegova verjetnost enaka:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_2 = 1) = e^{e^{-2}-1}\,e^{-2}\,e^{-e^{-2}} = e^{-3} \doteq 0{\cdot}0498\,.$$

b) Označimo z Z zamudo edinega zamudnika in začnimo računati pogojno kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$\begin{aligned} F_{Z|A}(t) &= \mathbb{P}(Z \le t \mid A) = \\ &= \mathbb{P}(N_t \ge 1 \mid A) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_t \ge 1, N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)}{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)} \,. \end{aligned}$$

Za $t \le 2$ je $F_{Z|A}(t) = 0$, za $t \ge 2$ pa velja:

$$\begin{aligned} F_{Z|A}(t) &= \frac{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_t - N_2 = 1, N_\infty - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_t - N_2 = 1)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_2 = 1)} = \\ &= 1 - e^{2-t} \,. \end{aligned}$$

Za izračun pogojne pričakovane zamude imamo več možnosti. Lahko izračunamo gostoto:

$$f_{Z|A}(t) = e^{2-t}$$

in z integriranjem dobimo:

$$\mathbb{E}(Z \mid A) = \int_2^\infty t\, e^{2-t}\, \mathrm{d}t = 3 \,.$$

Lahko ga dobimo tudi neposredno iz preživetvene funkcije:

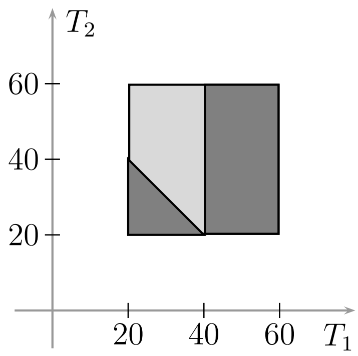
$$\mathbb{E}(Z \mid A) = \int_0^\infty \big(1 - F_{Z|A}(t)\big)\, \mathrm{d}t = 2 + \int_2^\infty e^{2-t}\, \mathrm{d}t = 3 \,.$$

Lahko pa tudi opazimo, da se pogojna porazdelitev ujema z eksponentno porazdelitvijo $\mathrm{Exp}(1)$, pomaknjeno za 2 v desno, in prav tako dobimo pogojno pričakovano zamudo 3 mesece.

4. a) Prihodi avtobusa tvorijo prenovitveni proces. Če medprihodne čase označimo s $T_1, T_2, \ldots$, je asimptotično dolgoročno število prihodov na uro enako:

$$\frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{3}{2} \,.$$

b) Dogodek, da bodo Peteršiljčkovi čakali manj kot 20 minut, lahko zapišemo kot $\{T_1 \ge 40\,\mathrm{min}\} \cup \{T_1 + T_2 < 1\,\mathrm{h}\}$. To lahko prikažemo na naslednjem diagramu:



in iz razmerja ploščin razberemo, da je iskana verjetnost enaka 5/8.