Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 20. 8. 2012

Finančna matematika

1. Označimo z M čas, ko režiser dobi moškega, z Z čas, ko dobi obe ženski, s T pa čas, ko dobi vse potrebne igralce. Tedaj je $T = \max\{M, Z\}$. Velja $M \sim \mathrm{Exp}(2)$ in $Z \sim \mathrm{Gama}(2,1)$, torej za $t > 0$ velja:

$$f_M(t) = 2\,e^{-2t}\,, \qquad F_M(t) = 1 - e^{-2t}\,,$$
$$f_Z(t) = t\,e^{-t}\,, \qquad F_Z(t) = 1 - (1+t)e^{-t}\,.$$

Zaradi neodvisnosti je:

$$F_T(t) = F_M(t)\,F_Z(t) = 1 - (1+t)e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}\,.$$

Pričakovano vrednost lahko izračunamo bodisi s pomočjo porazdelitvene gostote:

$$f_T(t) = t\,e^{-t} + 2\,e^{-2t} - 3\,e^{-3t}\,,$$
$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \left(t^2\,e^{-t} + 2t\,e^{-2t} - 3t\,e^{-3t}\right)\mathrm{d}t = \frac{13}{6}$$

bodisi s pomočjo preživetvene funkcije:

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \bigl(1 - F_T(t)\bigr)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (1+t)e^{-t} + 2\,e^{-2t} - 3\,e^{-3t} = \frac{13}{6}\,.$$

2. Označimo iskani čas s T, število všečkanj do časa t pa kot ponavadi označimo z N_t. Velja:

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}\left(\int_s^t \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Pois}\left(2\ln\frac{1+t}{1+s}\right)\,.$$

Poiščimo preživetveno funkcijo časa T. Če je $t \le 1$, je $\{T > t\} = \{N_t \le 1\}$, torej je:

$$\mathbb{P}(T > t) = \frac{1 + 2\ln(1+t)}{(1+t)^2}\,.$$

Za $t > 1$ pa je $\{T > t\} = \{N_1 \le 1, N_t - N_1 = 0\}$, zato je:

$$\mathbb{P}(T > t) = \frac{1 + 2\ln 2}{(1+t)^2}\,.$$

Kumulativna porazdelitvena funkcija je torej enaka:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t \le 0 \\ 1 - \dfrac{1 + 2\ln(1+t)}{(1+t)^2} & ;\ 0 \le t \le 1 \\ 1 - \dfrac{1 + 2\ln 2}{(1+t)^2} & ;\ t \ge 1 \end{cases}$$

in je absolutno zvezna, gostota porazdelitve pa je enaka:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & ; t \le 0 \\ \dfrac{2\ln(1+t)}{(1+t)^3} & ; 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{2+4\ln 2}{(1+t)^3} & ; t \ge 1 \end{cases} .$$

3. Označimo z A_t število briketov, ki jih je pes dobil od Andraža, z B_t število briketov, ki jih je dobil od Bineta, z N_t pa število briketov, ki jih je požrl. Velja $N_t = A_t + \mathbb{1}(B_t \ge 1)$. Ker je $A_t \sim \mathrm{Pois}(2t)$ in $B_t \sim \mathrm{Pois}(3t)$, velja:

$$\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(A_t) + \mathbb{P}(B_t \ge 1) = 2t + 1 - e^{-3t} .$$

4. Gre za prenovitveni proces z nagradami. Posamezen cikel ustreza življenjski dobi televizorja, priredimo pa mu nagrado, ki je enaka dohodku, ki ga ima trgovina z dobavo *naslednjega* televizorja. Če se televizorju življenjska doba izteče še pod garancijo, je prihodek enak -200 evrov, sicer pa je enak 100 evrov.
Če torej s T_i označimo življenjsko dobo televizorja, R_i pa prihodek v posameznem ciklu, velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_i) &= \frac{2}{25}\int_0^5 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{10}{3} , \\ \mathbb{P}(T_i \le 1) &= \frac{2}{25}\int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{25} , \\ \mathbb{E}(T_i) &= -200\ \mathbb{P}(T_i \le 1) + 100\,\mathbb{P}(T_i > 1) = 88 , \end{aligned}$$

pričakovani letni prihodek na zvesto stranko pa je enak:

$$\frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = 26{\cdot}4 .$$