Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 26. 8. 2013

Finančna matematika

1. Označimo z X_n spremembo Lojzetovega premoženja v n-ti igri, N pa igro, v kateri Lojze izgubi še zadnji evro. To je torej prvi indeks, za katerega je $S_N = -100$, kjer je:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

(brez škode si lahko mislimo, da Lojze tudi potem, ko pride na ničlo, še naprej igra na up). Ker je $\{N \le n\}$ dogodek, da je vsaj ena izmed vsot $S_1, S_2, \ldots S_n$ enaka -100, je N čas ustavljanja.
Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ so neodvisne in imajo porazdelitev:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 19/37 & 18/37 \end{pmatrix}.$$

Po Waldovi identiteti je $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(N)$. Velja $\mathbb{E}(X_1) = -1/37$ in $S_N = -100$, zato je $\mathbb{E}(N) = 3700$.

2. Označimo z N_t število vseh iglic, ki padejo na teraso do časa t, z $N_t^{(\mathrm{D})}$ pa število iglic, ki do časa t padejo na njen desni del. Nadalje naj bo $S_n^{(\mathrm{D})}$ čas, ko na desni del terase pade n-ta iglica. Najprej opazimo, da je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{D})} = 0 \mid N_1 = 2\big) &= \frac{4}{9}\,,\\
\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{D})} = 1 \mid N_1 = 2\big) &= \frac{4}{9}\,,\\
\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{D})} = 2 \mid N_1 = 2\big) &= \frac{1}{9}\,.
\end{aligned}$$

Če na desni del terase ni padla nobena iglica, se po lastnosti Markova vse začne na novo. Ker iglice, ki padajo na desni del terase, tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo ene iglice na uro, velja:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})} = 0\big) = 1 + \mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})}\big) = 3\,.$$

Če je na desni del terase padla natanko ena iglica, mora pasti le še ena iglica. Sledi:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})} = 1\big) = 1 + \mathbb{E}\big(S_1^{(\mathrm{D})}\big) = 2\,.$$

Če pa sta na desni del terase že padli dve iglici, moramo gledati, kdaj je padla druga. Pogojno na $\{N_1^{(\mathrm{D})} = 2\}$ je $S_2^{(\mathrm{D})}$ porazdeljena tako kot $\max\{U_1, U_2\}$, kjer sta U_1 in U_2 neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu od 0 do 1. Ker za $0 \le t \le 1$ velja:

$$\begin{aligned}
F_{S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})}=2}(t) &= F_{\max\{U_1,U_2\}}(t) = \mathbb{P}(\max\{U_1, U_2\} \le t) = \\
&= \mathbb{P}(U_1 \le t, U_2 \le t) = \mathbb{P}(U_1 \le t)\,\mathbb{P}(U_2 \le t) = t^2\,,
\end{aligned}$$

je:

$$f_{S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})}=2}(t) = 2t \quad \text{in} \quad \mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})} = 2\big) = \int_0^1 2t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,.$$

Končno po pogojni različici izreka o polnem matematičnem upanju dobimo:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1 = 2\big) = \frac{4}{9}\cdot 3 + \frac{4}{9}\cdot 2 + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{62}{27} \doteq 2\,\mathrm{h}\ \ 18\,\mathrm{min}\,.$$

3. Nalogo rešimo s pogojevanjem na čas prvega prihoda S_1, torej moramo najprej poznati porazdelitev te slučajne spremenljivke. Za $t > 0$ velja:

$$\mathbb{P}(S_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\int_0^t e^s\,\mathrm{d}s} = e^{-(e^t-1)}\,,$$

torej:

$$f_{S_1}(t) = e^{t-e^t+1}\,.$$

Če je A dogodek, da eno časovno enoto po prvem prihodu ni nobenega prihoda, po krepki lastnosti Markova velja:

$$\mathbb{P}(A \mid S_1) = e^{-\int_{S_1}^{S_1+1} e^s\,\mathrm{d}s} = e^{-e^{S_1}(e-1)}\,.$$

Torej velja:

$$\mathbb{P}(A) = \int_0^\infty e^{-e^s(e-1)}\, e^{s-e^s+1}\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty e^{s-e^{s+1}+1}\,\mathrm{d}s\,.$$

S substitucijo $u = e^s$ dobimo:

$$\mathbb{P}(A) = \int_1^\infty e^{-eu+1}\,\mathrm{d}u = e^{-e} \doteq 0{\cdot}066\,.$$

4. Gre za prenovitveni proces z zaostankom, pri katerem ima čas prvega prihoda porazdelitev $\mathrm{Gama}(2,2)$, vsi nadaljnji medprihodni časi pa so mešanica $2/3$ deterministične porazdelitve, skoncentrirane v nič, in $1/3$ porazdelitve $\mathrm{Gama}(2,2)$ (če čas merimo v letih). Laplaceovi transformiranki teh dveh porazdelitev sta enaki:

$$\hat{G}(z) = \left(\frac{2}{2+z}\right)^2,$$

$$\hat{F}(z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2+z}\right)^2,$$

Pričakovano število nadaljnjih kandidatk, ki se v t letih zvrstijo na razgovoru pri direktorju, je ravno prenovitvena mera. Njena Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1-\hat{F}(z)} = \frac{12}{z(z+4)} = 3\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+4}\right).$$

torej je prenovitvena mera sama enaka:

$$M(t) = 3\left(t - \int_0^t e^{-4s}\,\mathrm{d}s\right) = 3t - \frac{3}{4}\big(1 - e^{-4t}\big)\,.$$