Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
1. julij 2011

1. Gasilska postaja dobiva klice na pomoč v skladu s Poissonovim procesom z intenzivnostjo enega klica na 4 ure.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo v prvih 12 urah prejela vsaj dva klica na pomoč?

   b) Recimo, da je v prvih 12 urah res prejela vsaj dva klica na pomoč. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je prvi klic na pomoč dobila v prvih 4 urah?

   Namig: glejte nasprotne dogodke.

2. Ribiča Pepe in Rudi lovita ribe, dokler Pepe ne ujame vsaj ene ribe, nato pa mora ribo ujeti še Rudi (ne glede na to, ali je pred Pepetovim prvim ulovom že kaj ujel). Obe lovita ribe neodvisno in v skladu s homogenim Poissonovim procesom, Pepe z intenzivnostjo 2 ribi na uro, Rudi pa z intenzivnostjo 3 ribe na uro. Označimo z S čas, ki ga prebijeta na ribolovu.

   a) Izračunajte $\mathbb{E}(S)$ in $\operatorname{var}(S)$.

   b) Kolikšna je verjetnost, da je Rudi ujel ribo že pred Pepetom?

3. Dan je nehomogen Poissonov proces z intenzivnostjo:

$$\rho(t) = \frac{1}{1+t} .$$

   Določite porazdelitev časa prvega prihoda T_1 in medprihodnega časa T_2.

4. Manja po telefonu prodaja določen izdelek. Verjetnost, da bo stranko uspela prepričati do časa t, je enaka $3(t - t^2)$, če je $t \leq 1/2$, in $3/4$, če je $t \geq 1/2$ (vsakršno prepričevanje, ki gre čez $1/2$ časovne enote, je torej zaman). Če stranko prepriča, pogovor takoj konča in pokliče naslednjo stranko. To pa naredi tudi, če ji stranke po času τ še ni uspelo prepričati.

   Kako naj izbere čas τ, da bo dolgoročno gledano prodala čimveč izdelkov?

   Namig: pomagajte si z izražavo matematičnega upanja nenegativne slučajne spremenljivke s kumulativno porazdelitveno funkcijo oz. funkcijo preživetja:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\,\mathrm{d}x .$$