Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 1. 7. 2011

Finančna matematika

1. Označimo z N_t število klicev do časa t. Tedaj je $N_t \sim \mathrm{Pois}(t/4)$.

a) Iskana verjetnost je enaka:

$$\mathbb{P}(N_{12} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N_{12} = 0) - \mathbb{P}(N_{12} = 1) = 1 - e^{-3}(1+3) \doteq 0{\dot{}}801\,.$$

b) Iskana pogojna verjetnost je enaka:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_4 \geq 1 \mid N_{12} \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(N_4 = 0 \mid N_{12} \geq 2) = \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_4 = 0, N_{12} \geq 2)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)} = \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_4 = 0, N_{12} - N_4 \geq 2)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)}\,.\end{aligned}$$

Zaradi neodvisnosti je:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_4 \geq 1 \mid N_{12} \geq 2) &= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_4 = 0)\,\mathbb{P}(N_{12} - N_4 \geq 2)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)} = \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_4 = 0)\big(1 - \mathbb{P}(N_{12} - N_4 = 0) - \mathbb{P}(N_{12} - N_4 = 1)\big)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)}\end{aligned}$$

Ker je $N_4 \sim \mathrm{Pois}(1)$ in $N_{12} - N_4 \sim \mathrm{Pois}(2)$, je končno:

$$\mathbb{P}(N_4 \geq 1 \mid N_{12} \geq 2) = 1 - \frac{e^{-1}\big(1 - e^{-2}(1+2)\big)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)} \doteq 0{\dot{}}727\,.$$

2. a) Velja $S = U + V$, kjer je U čas, ki ga potrebuje Pepe, da ujame svojo prvo ribo, V pa je čas, ki ga od trenutka, ko Pepe ujame svojo prvo ribo, potrebuje Rudi, da ujame ribo. Seveda je $U \sim \mathrm{Exp}(2)$, zaradi krepke lastnosti Markova pa je tudi $V \sim \mathrm{Exp}(3)$, poleg tega pa je V neodvisna od U. Torej je:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(V) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\,, \\ \mathrm{var}(S) &= \mathrm{var}(U) + \mathrm{var}(V) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}\,.\end{aligned}$$

b) Dogodek, da je Rudi ujel ribo že pred Pepetom, je enak dogodku, da je bila prva ujeta riba Rudijeva. Verjetnost tega dogodka pa je $\dfrac{3}{2+3} = \dfrac{3}{5}$.

3. Če z N_t označimo število prihodov do časa t, velja:

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1+u}\right) = \frac{1}{1+t}\,.$$

Po odvajanju dobimo porazdelitveno gostoto:

$$f_{T_1}(t) = \frac{1}{(1+t)^2}\,.$$

Nadalje velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 > s \mid T_1 = t) = \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = 0 \mid T_1 = t) &= \exp\left(-\int_t^{t+s} \frac{\mathrm{d}u}{1+u}\right) = \\ &= \frac{1+t}{1+t+s}\,.\end{aligned}$$

Z integracijo dobimo brezpogojno preživetveno funkcijo:

$$\mathbb{P}(T_2 > s) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_2 > s \mid T_1 = t) f_{T_1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+s)} = \frac{\ln(1+s)}{s}$$

in po odvajanju spet porazdelitveno gostoto:

$$f_{T_2}(s) = \frac{(1+s)\ln(1+s) - s}{s^2(1+s)}\,.$$

4. Gre za prenovitveni proces z nagradami, kjer so medprihodni časi $T_1, T_2, \ldots$ dolžine Manjinih telefonskih pogovorov s posameznimi strankami, nagrada R_i pa je enaka 1, če Manja izdelek proda, sicer pa 0. Očitno je $\tau \le 1/2$. Torej velja:

$$F_{T_i}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 3(t - t^2) & ;\ 0 \le t < \tau \\ 1 & ;\ t \ge \tau \end{cases}\,.$$

Torej slučajna spremenljivka T_i ni niti diskretna niti zvezna. Vseeno pa lahko izračunamo njeno matematično upanje.
Prvi način: razbijemo na zvezni in diskretni del:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_i) &= \int_0^\tau t\,F'_{T_i}(t)\,\mathrm{d}t + \tau\big(F_{T_i}(\tau) - F_{T_i}(\tau^-)\big) = \\ &= \int_0^\tau (3t - 6t^2)\,\mathrm{d}t + \tau(1 - 3\tau + 3\tau^2) = \\ &= \tau - \frac{3\tau^3}{2} + \tau^3\,.\end{aligned}$$

Drugi način: izberemo slučajno spremenljivko $\tilde{T}$, katere kumulativna porazdelitvena funkcija je absolutno zvezna in se na intervalu $[0, \tau)$ ujema s kumulativno porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T_i. Tedaj je T_i enako porazdeljena kot $\min\{\tilde{T}, \tau\}$, zato je:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_i) &= \mathbb{E}\big[\min\{\tilde{T}, \tau\}\big] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \min\{t, \tau\}\, f_{\tilde{T}}(t)\, \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{\tau} t\, f_{\tilde{T}}(t)\, \mathrm{d}t + \tau \int_{\tau}^{\infty} f_{\tilde{T}}(t)\, \mathrm{d}t = \\
&= \int_{0}^{\tau} t\, F'_{\tilde{T}}(t)\, \mathrm{d}t + \tau\big(1 - F_{\tilde{T}}(\tau)\big) = \\
&= \int_{0}^{\tau} t\, F'_{T_i}(t)\, \mathrm{d}t + \tau\big(F_{T_i}(\tau) - F_{T_i}(\tau^-)\big)\,,
\end{aligned}
$$

kar je isto kot prej.

Tretji način: upoštevamo, da, ker je $T_i \geq 0$, velja:

$$
\mathbb{E}(T_i) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T_i > t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\tau} (1 - 3t + 3t^2)\, \mathrm{d}t = \tau - \frac{3\tau^3}{2} + \tau^3\,,
$$

kar je spet isto kot prej.

Dogodek, da je $R_i = 1$, je enak dogodku, da Manji uspe prepričati kupca do časa τ. Torej je:

$$
\mathbb{E}(R_i) = \mathbb{P}(R_i = 1) = 3(\tau - \tau^2)\,.
$$

Če z W_t označimo število prodanih izdelkov do časa t, skoraj gotovo velja:

$$
\lim_{t \to \infty} \frac{W_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{6(1 - \tau)}{2 - 3\tau + 2\tau^2} =: h(\tau)\,.
$$

Iz:

$$
h'(\tau) = \frac{6(2\tau^2 - 4\tau + 1)}{(\tau^2 - 3\tau + 2)^2}
$$

dobimo, da funkcija h na intervalu $[0, 1/2]$ doseže maksimum pri $\tau = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{\cdot}293$.