Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 2. 7. 2012

Finančna matematika

1. *Prvi način.* Označimo čas opazovanja s T. Ugodno ga je razdeliti na čas do prvega prihoda (T_1) in preostanek, ki ga bomo označili s T'. Oglejmo si drugi prihodni čas T_2. Če je $T_2 < \delta$, je opazovanja konec, zato je tedaj $T' = T_2$. Sicer pa se od trenutka drugega prihoda naprej vse začne na novo: od takrat naprej moramo opazovati še čas T'', ki je pogojno na zgodovino porazdeljen enako kot T'. Torej velja:

$$T' = T_2 + T'' \mathbb{1}(T_2 \geq \delta)\,,$$

od koder sledi:

$$\mathbb{E}(T') = \mathbb{E}(T_2) + \mathbb{E}(T')\,\mathbb{P}(T_2 \geq \delta)\,.$$

Ker je $T_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, je $\mathbb{E}(T_2) = 1/\lambda$ in $\mathbb{P}(T_2 \geq \delta) = e^{-\lambda\delta}$, torej je:

$$\mathbb{E}(T') = \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda\delta}\,\mathbb{E}(T')$$

oziroma:

$$\mathbb{E}(T') = \frac{1}{\lambda\bigl(1 - e^{-\lambda\delta}\bigr)}$$

in končno:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T') = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\bigl(1 - e^{-\lambda\delta}\bigr)} = \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\bigl(1 - e^{-\lambda\delta}\bigr)}\,.$$

Drugi način. Če z N označimo zaporedno številko prihoda, ob katerem končamo opazovanje, za $n = 2, 3, 4, \ldots$ velja:

$$\{N = n\} = \{T_2 \geq \delta,\ T_3 \geq \delta, \ldots T_{n-1} \geq \delta,\ T_n < \delta\}\,.$$

Na dogodku $\{N = n\}$ velja $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$. Seveda je $\mathbb{E}(T_1 \mid N = n) = \mathbb{E}(T_1) = 1/\lambda$. Nadalje za $i = 2, 3, \ldots n-1$ velja:

$$\mathbb{E}(T_i \mid N = n) = \mathbb{E}(T_i \mid T_i \geq \delta) = \frac{\mathbb{E}\bigl[T_i\,\mathbb{1}(T_i \geq \delta)\bigr]}{\mathbb{P}(T_i \geq \delta)} = \frac{1}{e^{-\lambda\delta}} \int_\delta^\infty \lambda t\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} + \delta$$

(to sledi tudi iz pozabljivosti eksponentne porazdelitve), medtem ko je:

$$\mathbb{E}(T_n \mid N = n) = \mathbb{E}(T_n \mid T_n < \delta) = \frac{\mathbb{E}\bigl[T_i\,\mathbb{1}(T_i < \delta)\bigr]}{\mathbb{P}(T_i < \delta)} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda\delta}} \int_0^\delta \lambda t\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{\delta\, e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N) = \frac{N}{\lambda} + (N-2)\delta - \frac{\delta\, e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}} = N\left(\frac{1}{\lambda} + \delta\right) - \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}}\,\delta\,.$$

Ker je $N-1$ porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}\big(\mathbb{P}(T_1 < \delta)\big) = \mathrm{Geom}\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)$, je:

$$\mathbb{E}(N) = 1 + \frac{1}{1 - e^{-\lambda\delta}} = \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\left(\frac{1}{\lambda} + \delta\right) - \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}}\,\delta = \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)}\,.$$

Tretji način. Z oznakami iz drugega načina je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$. Opazimo, da je N čas ustavljanja, saj je dogodek $\{N = n\}$ enolično določen s $T_1, T_2, \ldots T_n$ (glej zgoraj). Po Waldovi identiteti je potem:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(T_1) = \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)}\,.$$

Četrti način. Celotni čas opazovanja spet razdelimo na čas do prvega prihoda (T_1) in preostanek T'. V preostanku podaljšajmo celotni proces opazovanj v nedogled, tako da dobimo *cikle* opazovanj. Celotni čas opazovanja je tako sestavljen iz časa čakanja na prvi prihod (T_1) in enega ali več ciklov. Vsak cikel se konča ob prihodu, pri katerem od prejšnjega prihoda mine manj kot δ. Cikli tvorijo prenovitveni proces. Označimo njegove medprihodne čase s $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots$ (torej je $T' = \tilde{T}_1$).
Označimo z W_t število zaključenih ciklov do časa $t + T_1$. To lahko izrazimo na naslednja dva načina: s prej omenjenim prenovitvenim procesom ciklov opazovanj in s prenovitvenim procesom, ki pripada prvotnemu Poissonovemu procesu od prvega prihoda naprej in ki mu pripišemo še nagrade $R_2, R_3, \ldots$, kjer je $R_n = 1$, če se ob n-tem prihodu prvotnega Poissonovega procesa zaključi cikel opazovanj (torej če je od prejšnjega prihoda minilo manj kot δ), sicer pa je $R_n = 0$. Velja $\mathbb{P}(R_n = 1) = \mathbb{P}(T_n < \delta) = 1 - e^{-\lambda\delta}$. Po krepkem zakonu velikih števil za oba prenovitvena procesa je skoraj gotovo:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(\tilde{T}_1)} = \frac{1}{\mathbb{E}(T')} = \frac{\mathbb{E}(R_2)}{\mathbb{E}(T_2)}\,,$$

torej mora biti:

$$\mathbb{E}(T') = \frac{\mathbb{E}(T_2)}{\mathbb{E}(R_2)} = \frac{1}{\lambda\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)}$$

in končno:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T') = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)} = \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)}\,.$$

2. Označimo z N_t^{A} število asistentov, z N_t^{S} pa število študentov, ki pridejo do časa t. Dogodek, na katerega pogojujemo, lahko tedaj zapišemo kot $\{N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\}$. Pogojno na ta dogodek so posamezni prihodi neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu od 0 do 2 (merjeno v urah) in ohrani se, da je vsak, ki pride, z verjetnostjo 40% asistent, z verjetnostjo 60% pa študent. Dogodek, na katerega pogojujemo, je disjunktna unija dogodkov $\{N_2^{\mathrm{A}} = n, N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\}$; $n = 0, 1, 2, 3$. Velja:

$$\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} = n, N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n \mid N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big) = \binom{3}{n} \cdot 0\text{'}4^n \cdot 0\text{'}6^{3-n} \,.$$

Če s T_1^{A} označimo čas prihoda prvega asistenta, velja:

$$\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \mid N_2^{\mathrm{A}} = n, N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big) = \mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \mid N_2^{\mathrm{A}} = n\big) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \mid N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big) &= \frac{\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1,\ N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)}{\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)} = \\
&= \sum_{n=0}^{3} \frac{\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1,\ N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big)}{\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)} = \\
&= \sum_{n=0}^{3} \frac{\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big)\,\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \mid N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big)}{\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)} = \\
&= \sum_{n=0}^{3} \mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n \mid N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)\,\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \mid N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big) = \\
&= 3 \cdot 0\text{'}4 \cdot 0\text{'}6^2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0\text{'}4^2 \cdot 0\text{'}6 \cdot \frac{3}{4} + 0\text{'}4^3 \cdot \frac{7}{8} = \\
&= 0\text{'}488 \,.
\end{aligned}$$

3. Najprej izračunamo preživetveno funkcijo:

$$1 - F_{S_2}(s) = \mathbb{P}(S_2 > s) = \mathbb{P}(N_s < 2) \,.$$

Ker je $N_s \sim \mathrm{Pois}\big(R(s)\big)$, kjer je:

$$R(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{s} \,,$$

velja:

$$1 - F_{S_2}(s) = \big(1 + 2\sqrt{s}\big) e^{-2\sqrt{s}} \,.$$

Porazdelitvena gostota je torej enaka:

$$f_{S_2}(s) = 2\, e^{-2\sqrt{s}} \,,$$

pričakovana vrednost pa:

$$\mathbb{E}(S_2) = 2\int_0^\infty s\, e^{-2\sqrt{s}} = \frac{1}{4}\int_0^\infty t^3\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,.$$

Alternativno jo lahko izračunajo tudi s pomočjo preživetvene funkcije:

$$\mathbb{E}(S_2) = \int_0^\infty \bigl(1 - F_{S_2}(s)\bigr)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \bigl(1 + 2\sqrt{s}\bigr)e^{-2\sqrt{s}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (t + t^2)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,.$$

4. Označimo s T čas, v katerem igralni avtomat izvrže nagrado. Tedaj lahko Nacetovo igranje ponazorimo s prenovitvenim procesom z nagradami, kjer imajo medprihodni časi enako porazdelitev kot $\min\{T, x\}$, nagrade pa enako porazdelitev kot $\mathbb{1}(T \le x)$. Torej velja:

$$\mathbb{E}(T_1) = 2\int_0^x t(1-t)\,\mathrm{d}t + 2x\int_x^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = x - x^2 + \frac{x^3}{3}$$

in:

$$\mathbb{E}(R_1) = 2\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t = 2x - x^2\,.$$

Dolgoročno število nagrad na časovno enoto je po krepkem zakonu velikih števil enako:

$$\frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = 3\,\frac{2-x}{3-3x+x^2}\,.$$

Iz odvoda:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = 3\,\frac{-3+3x-x^2+(2-x)(3-2x)}{(3-3x+x^2)^2} = 3\,\frac{x^2-4x+3}{(3-3x+x^2)^2}$$

razberemo, da je to število maksimalno pri $x = 1$.