1. naloga [15 točk]

Ribiča A in B sta se odpravila k reki lovit ribe. Privzemite, da število ulovljenih rib posameznega ribiča predstavlja homogeni Poissonov proces ter da sta procesa med sabo neodvisna. Pri tem ribič A v povprečju ujame 2 ribi na uro, ribič B pa 3 na uro. Do reke prideta v času 0.

(4) (a) Ribiča sta se dogovorila, da bosta končala z ribolovom, ko bosta skupaj ujela 10 rib. Naj slučajna spremenljivka X pomeni trajanje ribolova. Določite upanje in disperzijo spremenljivke X.

(3) (b) V prvi uri sta ribiča skupaj ujela 4 ribe. Izračunajte pogojno verjetnost, da je pri tem vsaj 2 ribi ujel ribič B.

(3) (c) V prvih dveh urah je vsak ribič ujel 3 ribe. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo njun ribolov trajal vsaj še eno uro?

(5) (d) Ker se je 2 uri po prihodu ribič B naveličal ribolova, sta se dogovorila, da domov odideta, ko vsak od njiju ujame vsaj še eno ribo. Naj spremenljivka Y pomeni čas do odhoda domov. Določite porazdelitev in upanje spremenljivke Y.

Ribič A: N_t^A homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda_A = 2$

Ribič B: N_t^B homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda_B = 3$

N_t^A, N_t^B neodvisna

(a) Skupen proces $N_t = N_t^A + N_t^B$ je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda = 2+3=5$. 1

velja $X = S_{10}$: čas desetega skoka v procesu N_t 1

$X = T_1 + T_2 + \dots + T_{10}$; T_i NEP $\mathrm{Exp}(5)$

$E(X) = E(T_1) + \dots + E(T_{10}) = 10\, E(T_1) = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$ 1

$D(X) = D(T_1) + \dots + D(T_{10}) = 10 \cdot D(T_1) = 10 \cdot \frac{1}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ 1

(b) Skupen proces N_t

ujete ribe ribiča B so markiranje N_t z Bernoullijevo 1

spremenljivko $I_i = \begin{cases} 0; & \frac{2}{5} \\ 1; & \text{verjetnost } \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5} \end{cases}$

zanima nas verjetnost, da sta med 4 skoki vsaj dva markirana z 1

binomska porazdelitev

$P(N_1^B \geq 2 \mid N_1 = 4) = \frac{1}{P(N_1^B \geq 2)} \left[P(N_1^B = 2, N_1^A = 2) + \dots + P(N_1^B = 4, N_1^A = 0) \right]$

$P(\text{vsaj dve ribi}) = P(\text{dve ribi}) + P(\text{tri ribe}) + P(\text{štiri ribe}) = 1$

$$= \binom{4}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{5^4}\left(6\cdot 9\cdot 4 + 4\cdot 27\cdot 2 + 1\cdot 81\right) = \frac{513}{625} = 0{,}8208 \quad 1$$

(c) Skupen proces: $N_2 = 6$

Ribolov traja vsaj še eno uro $\iff N_3 < 10$ 1

$$P(N_3 < 10 \mid N_2 = 6) = \frac{P(N_3 < 10, N_2 = 6)}{P(N_2 = 6)} = \frac{P(N_3 - N_2 < 4, N_2 = 6)}{P(N_2 = 6)} =$$

$$= \frac{P(N_3 - N_2 < 4)\cdot P(\cancel{N_2 = 6})}{P(\cancel{N_2 = 6})} = P(N_1 < 4) = e^{-5} + \frac{5}{1!}e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} + \frac{5^3}{3!}e^{-5} \quad 1$$

$N_1 \sim \mathrm{Pois}(5)$

$$= e^{-5}\left(+ \frac{25}{2} + \frac{125}{6}\right) =$$

$$= \frac{13}{3}e^{-5} = 0, \quad 1$$

(d) Čas, da A ujame ribo, je $A \sim \mathrm{Exp}(2)$
Čas, da B ujame ribo, je $B \sim \mathrm{Exp}(3)$] neodvisni, ker procesa neodvisna

↑ čas do naslednjega skoka

Vsak ujame vsaj eno je maximum A in B $= Y$ 1

Porazdelitvena funkcija: $P(Y \le y) = P(\max\{A, B\} \le y) =$

$$= P(A \le y, B \le y) = P(A \le y)\cdot P(B \le y) = (1 - e^{-2y})(1 - e^{-3y}) =$$

porazdelitveni $= 1 - e^{-2y} - e^{-3y} + e^{-5y}$ 1

gostota $f_Y(y) = 2e^{-2y} + 3e^{-3y} - 5e^{-5y}$ za $y \ge 0$. 1

upanje $E(Y) = \int_0^\infty (2e^{-2y} + 3e^{-3y} - 5e^{-5y})\, y\, dy = 1$ $\quad y = u \quad (\ )dy = dv$; $dy = du \quad \ldots = v$

$$= y(-e^{-2y} - e^{-3y} + e^{-5y})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-2y} - e^{-3y} + e^{-5y})\, dy =$$

$$= -\left(\frac{e^{-2y}}{2} + \frac{e^{-3y}}{3} - \frac{e^{-5y}}{5}\right)\Bigg|_0^\infty = +\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{19}{30} = 0{,}63 \quad 1$$

(38 minut)

2. naloga [15 točk]

Vir radioaktivnega sevanja oddaja delce alfa skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda > 0$ na enoto časa. V trenutku 0 prižgemo detektor delcev alfa. Privzemite, da po vsakem zaznanem delcu detektor postane neuporaben za naslednjih b enot časa, kjer je b znana konstanta. Če vir v tem času odda delec, ga detektor ne zazna. Naj bo R_t proces štetja delcev, ki jih detektor zazna.

(3) (a) Natančno karakterizirajte proces R_t.

(5) (b) Zapišite porazdelitvene funkcije in gostote vseh medprihodnih časov.

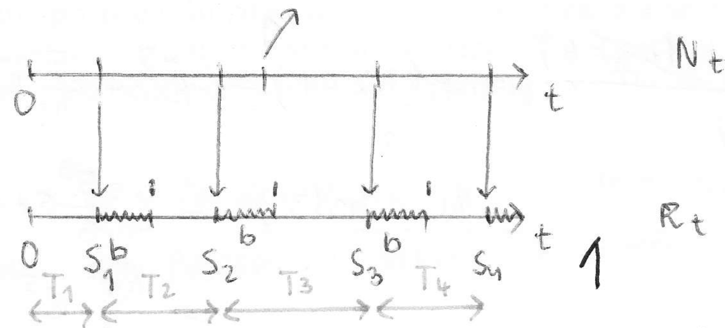
(2) (c) Izračunajte verjetnost, da detektor zazna vseh prvih k oddanih delcev.

(5) (d) Korektno izračunajte $\lim_{t\to\infty} \frac{E(R_t)}{t}$.

(a)

Oddani delci :

zaznani delci :



1

Gre za prenovitveni proces z zaostankom ; glej točko (b) 2

(b) Medprihodni časi

$T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, saj je čas čakanja na skok v N_t 1

$T_2, T_3, \ldots$ NEP $\underbrace{b + \mathrm{Exp}(\lambda)}$ 1, tudi neodvisni od T_1

$$P(T_2 \le x) = P(b + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{Exp}(\lambda)}}{X} \le x) = P(X \le x-b) = \begin{cases} 0; & x \le b \\ 1 - e^{-\lambda(x-b)}; & x > b \end{cases}$$ 1

$f_{T_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ za $x \ge 0$ 1

$$f_{T_2}(x) = \begin{cases} 0; & x \le b \\ \lambda e^{-\lambda(x-b)}; & x > b \end{cases}$$ 1

(c) Detektor zazna vseh prvih k oddanih delcev, če so medprihodni časi $T_2, T_3, \ldots, T_k$ Poissonovega procesa N_t večji od b.

$T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ NEP

prvi delec je vedno zaznan

$P(\text{vseh } k \text{ zaznanih}) = P(T > b)^{k-1} = \left(e^{-\lambda b}\right)^{k-1} = e^{-\lambda b(k-1)}$ 2

(d) korektno $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{E(R_t)}{t}$:

R_t ima zaostanek, omejimo s procesom, ki nima zaostanka.

Definiramo proces Y_t, ki šteje sprostitve detektorja po blokadi 1

$\Rightarrow$ vsi medprihodni časi so $\underbrace{b + \mathrm{Exp}(\lambda)}$

$$E(b + \mathrm{Exp}(\lambda)) = b + \frac{1}{\lambda} \quad 1$$

Po osnovnem prenovitvenem izreku je $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{E(Y_t)}{t} = \frac{1}{b + \frac{1}{\lambda}}$ 1

Velja pa $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{trenutno} \\ \text{blokiran}}}{Y_t \le} R_t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sicer}}}{\le} Y_t + 1$

Potem velja (monotonost upanja): $E(Y_t) \le E(R_t) \le E(Y_t) + 1$ 1

$$\Rightarrow \frac{E(Y_t)}{t} \le \frac{E(R_t)}{t} \le \frac{E(Y_t)+1}{t} = \frac{E(Y_t)}{t} + \frac{1}{t}$$

$$\frac{E(Y_t)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{b+\frac{1}{\lambda}} \qquad \frac{E(Y_t)}{t} + \frac{1}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{b+\frac{1}{\lambda}} + 0$$

Sendvič $\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \frac{E(R_t)}{t} = \frac{1}{b + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{b\lambda + 1}$ 1

3. naloga [20 točk]

Asistent pri predmetu Finančni praktikum prejema domače naloge študentov skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2/dan. Asistent se loti pregledovanja nalog šele, ko zbere 10 domačih nalog. Privzemite, da v času 0 asistent nima nobene domače naloge. Naj S_i označuje trenutek, ko se asistent i-tič loti pregledovanja nalog. Čas, ki ga porabi za pregledovanje nalog, zanemarite.

(5) (a) Dokažite, da trenutki S_i predstavljajo prenovitveni proces. Natančno opišite njegove medprihodne porazdelitve.

(3) (b) Določite pričakovani čas trenutka, ko se asistent tretjič loti pregledovanja nalog.

(4) (c) Naj v trenutku t spremenljivka X pomeni čas, ki bo pretekel do trenutka, ko se bo asistent naslednjič lotil pregledovanja domačih nalog. Naj $\cancel{e_t(x)}$ $e_X(t)$ $= P(X \leq x)$ označuje porazdelitveno funkcijo spremenljivke X. Izpeljite prenovitveno enačbo, ki jo reši funkcija $\cancel{e_t(x)}$ $e_X(t)$.

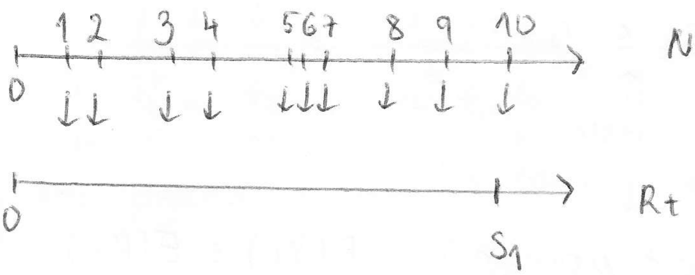
(3) (d) Privzemite, da asistent za dva tedna odide na dopust. Koliko študentov bo v tem času oddalo svojo domačo nalogo.

Spremenljivka Y

Upanje in disperzija !

Oddajanje nalog

Popravljanje



1

ⓐ

Deseti skok N_t pomeni S_1

Dvajseti skok N_t pomeni S_2

...

Medprihodni časi so enaki vsotam desetih neodvisnih eksponentno porazdeljenih spremenljivk 1

↳ Exp(2)

medprihodna porazdelitev $T_i \sim \Gamma(\overset{n}{10}, \overset{\lambda}{2})$ 1

T_i NEP, $P(T_i = 0) = 0$ 1

$\Rightarrow$ pravi prenovitveni proces 1

ⓑ Tretjič se loti popravljati, ko dobi trideseto domačo nalogo 1

$E(S_3) = 30 \cdot E(\tilde{T}_i) = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ dni 2

↑ Exp(λ)

(c) Spremenljivka X je ravno presežek prenovitvenega procesa R_t v trenutku t.

$e_x(t) = P(X \leq x) = P(E_t \leq x)$ je njena porazdelitvena funkcija

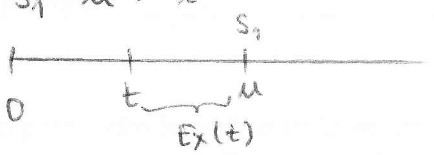
Vemo: $e_x(t)$ je rešitev $(F(t+x) - F(t), F(t))$ prenovitvene enačbe

$$\Rightarrow \quad e_x(t) = F(t+x) - F(t) + \int_0^t e_x(t-u)\, dF(u) \quad \text{za} \quad t \geq 0$$

Izpeljava:

$$e_x(t) = P(E_t \leq x) = \int_0^\infty P(E_t \leq x \mid S_1 = u)\, dF(u) \,\Big] = (*)$$

- $S_1 = u > t$

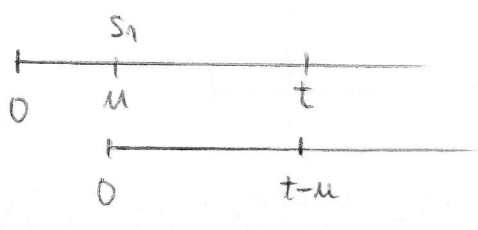


v času t še ni bilo skoka, naslednji skok bo ob u

$\Rightarrow E_t = u - t$

$$P(E_t \leq x \mid S_1 = u) = \begin{cases} 1; & u - t \leq x \\ 0; & u - t > x \end{cases} = \begin{cases} 1; & u \leq t + x \\ 0; & u > t + x \end{cases} \qquad 3$$

- $S_1 = u \leq t$



v času S_1 začnemo opazovati nov proces, stari t je v tem procesu čas $t-u$

$$P(E_t \leq x \mid S_1 = u) = P(E_{t-u} \leq x) = e_x(t-u) \qquad 2$$

$$(*) = \int_0^t P(E_t \leq x \mid S_1 = u)\, dF(u) + \int_t^\infty P(E_t \leq x \mid S_1 = u)\, dF(u)$$

$$= \int_0^t e_x(t-u)\, dF(u) + \int_t^\infty 1_{\{u \leq t+x\}}\, dF(u) =$$

$$= \int_0^t e_x(t-u)\,dF(u) + \int_t^{t+x} dF(u) =$$

$$= \int_0^t e_x(t-u)\,dF(u) + F(t+x) - F(t)$$ 3 (1 samo za zapis)

ⓓ Naloge prihajajo po Poissonu s parametrom 2/dan

$Y = N_{14} \sim \text{Pois}(14 \cdot 2) = \text{Pois}(28)$ 1

$E(Y) = 28$ 1

$D(Y) = 28$ 1