Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 20. 6. 2012

Finančna matematika

1. Največji učinek ima zadnji prihod. Mislimo si, da časovni interval podaljšamo neskončno nazaj v zgodovino. Če tedaj z X označimo čas, ki je minil od zadnjega prihoda do konca intervala, je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, učinek pa je enak:

$$U = \begin{cases} e^{-\alpha X} & ; X \le 1 \\ 0 & ; X > 1 \end{cases} .$$

Iskana količina je:

$$\mathbb{E}(U) = \lambda \int_0^1 e^{-\alpha x} \, e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \left(1 - e^{-\alpha - \lambda}\right) .$$

2. Označimo najprej s H dogodek, da je bil v prve pol ure natanko en ogled. Dogodek H je disjunktna unija dveh dogodkov: dogodka H_F, da edini študent, ki pride na ogled, študira finančno matematiko, in dogodka H_S, da ta edini študent študira splošno matematiko. Iz teorije markiranja sledi, da je:

$$\mathbb{P}(H_F \mid H) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{in} \quad \mathbb{P}(H_S \mid H) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} .$$

Če s T_F označimo pogojni pričakovani čas prvega študenta finančne matematike, ki pride, je ta slučajna spremenljivka pogojno na dogodek H_F porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do $1/2$ (merjeno v urah), pogojno na dogodek H_S pa je $T_F - 1/2$ porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(4)$. Sledi:

$$\mathbb{E}(T_F \mid H_F) = \frac{1}{4} \quad \text{in} \quad \mathbb{E}(T_F \mid H_S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} .$$

Končno velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_F \mid H) &= \frac{\mathbb{E}\big(T_F \, \mathbb{1}(H)\big)}{\mathbb{P}(H)} = \\ &= \frac{\mathbb{E}\big(T_F \, \mathbb{1}(H_F)\big) + \mathbb{E}\big(T_F \, \mathbb{1}(H_S)\big)}{\mathbb{P}(H)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_F) \, \mathbb{E}(T_F \mid H_F) + \mathbb{P}(H_S) \, \mathbb{E}(T_F \mid H_S)}{\mathbb{P}(H)} = \\ &= \mathbb{P}(H_F \mid H) \, \mathbb{E}(T_F \mid H_F) + \mathbb{P}(H_S \mid H) \, \mathbb{E}(T_F \mid H_S) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

oziroma 25 minut.

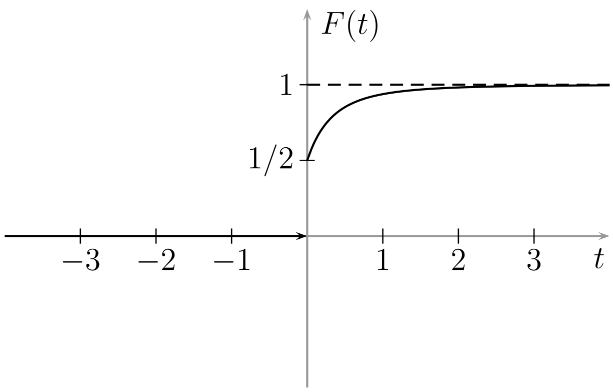
3. a) Število tistih, ki zamudijo manj kot dva meseca, je porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(R(2)\big)$, kjer je $R(t) = \int_0^t e^{-s}\,\mathrm{d}s = 1 - e^{-t}$. Torej je verjetnost iskanega dogodka enaka:

$$R(2)\,e^{-R(2)} = \big(1 - e^{-2}\big)e^{-(1-e^{-2})} \doteq 0{\cdot}364\,.$$

b) Vprašanje lahko formuliramo kot pogojno verjetnost dogodka, da nihče ne bo zamudil več kot dva meseca, glede na dogodek, da natanko eden zamudi manj kot dva meseca. Toda ta dva dogodka sta neodvisna, zato je to kar brezpogojna verjetnost dogodka, da ne bo nihče zamudil več kot dva meseca. Ker je število tistih, ki zamudijo več kot dva meseca, porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(R(\infty) - R(2)\big) = \mathrm{Pois}\big(e^{-2}\big)$, je iskana verjetnost enaka:

$$e^{-e^{-2}} \doteq 0{\cdot}873\,.$$

4. Graf:



Dolgoročno število prihodov na časovno enoto je recipročna vrednost pričakovanega medprihodnega časa v urah, le-ta pa je enak:

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty t\,\mathrm{d}F(t) = \int_0^\infty t\,F'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$$

ali tudi:

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,.$$

Dolgoročno gledano ima torej dani proces 4 prihode na časovno enoto.