Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 20. 6. 2013

Finančna matematika

1. a) Opazimo, da je rezultat popolnoma isti, kot če bi Pepi ves čas lovil ribe v prvem ribniku, to pa je $4\,e^{-3} \doteq 0{\cdot}199$.

b) Označimo z S_2 čas, ko je Pepi ujel drugo ribo, z A pa dogodek, da je ujel več kot dve ribi. Tedaj velja:

$$\mathbb{P}(A \mid S_2) = \begin{cases} 1 - e^{-2(1-S_2)} & ;\ S_2 < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$

Nadalje ima slučajna spremenljivka S_2 porazdelitev Gama$(2,3)$, ki je zvezna z gostoto:

$$f_{S_2}(s) = \begin{cases} 9s\,e^{-3s} & ;\ s > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \int_0^1 9s\,e^{-3s}\big(1 - e^{-2(1-s)}\big)\,\mathrm{d}s = \\ &= 9\int_0^1 s\,e^{-3s}\,\mathrm{d}s - 9\,e^{-2}\int_0^1 s\,e^{-s}\,\mathrm{d}s = \\ &= 1 - 9\,e^{-2} + 14\,e^{-3} \doteq \\ &\doteq 0{\cdot}479\,. \end{aligned}$$

2. *Prvi način.* Čas, ob katerem zakonca kupita avto, je minimum slučajnih spremenljivk Z_3 in M_2. Pomagamo si s preživetveno funkcijo:

$$\mathbb{P}(M_2 > t) = (\mu t + 1)e^{-\mu t}\,, \qquad \mathbb{P}(Z_3 > t) = \frac{1}{2}\,(\lambda^2 t^2 + 2\lambda t + 2)e^{-\lambda t}\,,$$

iz katere izračunamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(Z_3 > t, M_2 > t) = \mathbb{P}(Z_3 > t)\,\mathbb{P}(M_2 > t) = \\ &= \frac{1}{2}\big(\lambda^2\mu t^3 + \lambda(\lambda + 2\mu)t^2 + 2(\lambda + \mu)t + 2\big)e^{-(\lambda+\mu)t}\,. \end{aligned}$$

kar nam da:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^4} + \frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^3} + \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{1}{\lambda+\mu} = \\ &= \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda+\mu)^4}\,. \end{aligned}$$

Drugi način. Uporabimo neodvisnost in enako porazdeljenost označb v združenem procesu prihajanja ponudb: vsaka ponudba je z verjetnostjo $\lambda/(\lambda+\mu)$ označena za ženo, z verjetnostjo $\mu/(\lambda+\mu)$ pa za moža. Nato uporabimo Waldovo identiteto, in sicer gledamo časovne intervale med posameznimi primernimi ponudbami (tako tistih, ki jih gleda žena, kot tistih, ki jih gleda mož). Kot ponavadi označimo njihove dolžine s $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Tedaj je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$, kjer je N zaporedna številka ponudbe, ob kateri pride do nakupa. Za vsak časovni interval vemo, koliko dolg je (T_n) in kdo je ob njegovem izteku našel ponudbo. Glede na to je N čas ustavljanja. Združene ponudbe tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda+\mu$, torej je $\mathbb{E}(T_n) = 1/(\lambda+\mu)$. Po Waldovi identiteti je dovolj izračunati $\mathbb{E}(N)$.
Možni poteki ponudb do nakupa skupaj z verjetnostmi in dolžinami (N) so zbrani v naslednji tabeli:

Potek	ŽŽŽ	MŽŽŽ	ŽMŽŽ	ŽŽMŽ
Dolžina	3	4	4	4
Verjetnost	$\frac{\lambda^3}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$

Potek	MM	ŽMM	MŽM	ŽŽMM	ŽMŽM	MŽŽM
Dolžina	2	3	3	4	4	4
Verjetnost	$\frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$	$\frac{\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$

Torej je $N \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} & \frac{\lambda^3+2\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3} & \frac{3\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^3} \end{pmatrix}$, od koder izračunamo najprej:

$$\mathbb{E}(N) = \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda+\mu)^3}$$

in nato po Waldovi identiteti še:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda+\mu)^4},$$

kar je seveda enako kot pri prvem načinu.

3. Pišimo $W = X + Y$, kjer je $X = N_2 - N_1$ in $Y = N_3 - N_2$. Pogojno na dogodek A je slučajna spremenljivka X porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(2, p)$, kjer je:

$$p = \frac{\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}}{\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 3} \doteq 0{\cdot}369\,,$$

slučajna spremenljivka Y pa je porazdeljena po Poissonu $\mathrm{Pois}(\lambda)$, kjer je:

$$\lambda = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 4 - \ln 3 \doteq 0{\cdot}287\,.$$

Poleg tega sta slučajni spremenljivki pogojno glede na A neodvisni. Torej je:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W \mid A) &= \mathbb{E}(X \mid A) + \mathbb{E}(Y \mid A) = 2p + \lambda \doteq 1{\cdot}026\,,\\ \operatorname{var}(W \mid A) &= \operatorname{var}(X \mid A) + \operatorname{var}(Y \mid A) = 2p(1-p) + \lambda \doteq 0{\cdot}753\,.\end{aligned}$$

4. Gre za prenovitveni proces z zaostankom, pri katerem je čas prvega prihoda porazdeljen eksponentno Exp(1/30), vsi nadaljnji medprihodni časi pa so mešanica 2/3 eksponentne porazdelitve Exp(1/20) in 1/3 eksponentne porazdelitve Exp(1/30) (če čas merimo v minutah). Laplaceovi transformiranki teh dveh porazdelitev sta enaki:

$$\begin{aligned}\hat{G}(z) &= \frac{1}{1+30z}\,,\\ \hat{F}(z) &= \frac{2}{3}\,\frac{1}{1+20z} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+30z} = \frac{3+80z}{3(1+20z)(1+30z)}\,,\end{aligned}$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere pa je enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1-\hat{F}(z)} = \frac{3(1+20z)}{z(70+1800z)} = \frac{3}{70z} - \frac{12}{7(7+180z)} = \frac{3}{70z} - \frac{1}{105\bigl(z+\frac{7}{180}\bigr)}\,.$$

torej je prenovitvena mera sama enaka:

$$M(t) = \frac{3t}{70} + \frac{1}{105}\int_0^t e^{-7s/180}\,\mathrm{d}s = \frac{3t}{70} + \frac{12}{49}\bigl(1-e^{-7t/180}\bigr)\,.$$

Ponovimo, da ta mera velja za čas, merjen v minutah. Če bi ga merili v urah, bi dobili:

$$M(t) = \frac{18t}{7} + \frac{12}{49}\bigl(1-e^{-7t/3}\bigr)\,.$$

Proces je stacionaren, če je proces $(N_{s+t}-N_t)_{s\geq 0}$ porazdeljen enako kot prvotni proces $(N_s)_{s\geq 0}$. Od tod sledi, da je $\mathbb{E}(N_{s+t})-\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(N_s)$, torej $M(s+t)-M(t) = M(s)$. To pa v našem primeru ne drži, torej proces ni stacionaren.