

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 1. 3. 2012

Finančna matematika

1. Označimo s T čas skoka tistega učenca, ki skoči drugi. Tedaj je $T > t$ natanko tedaj, ko sta do vključno časa t skočila manj kot dva učenca.

Verjetnost, da je posamezen učenec skočil do vključno časa t , je enaka $1 - e^{-t/30}$, če je čas merjen v sekundah. Število učencev, ki skočijo do vključno časa t , je torej porazdeljeno binomsko $\text{Bin}(10, 1 - e^{-t/30})$. Zato je:

$$\mathbb{P}(T > t) = (e^{-t/30})^{10} + 10(1 - e^{-t/30})(e^{-t/30})^9 = 10e^{-3t/10} - 9e^{-t/3},$$

od koder dobimo kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F_T(t) = 1 - 10e^{-3t/10} + 9e^{-t/3},$$

nato gostoto:

$$f_T(t) = 3(e^{-3t/10} - e^{-t/3})$$

in končno pričakovano vrednost:

$$\mathbb{E}(T) = 3 \int_0^{\infty} t(e^{-3t/10} - e^{-t/3}) dt = 57.$$

Pričakovani čas skoka je torej 57 sekund.

2. Od vsakega prodanega sesalnika ima družba z obrestmi vred najmanj 200 in največ 210 evrov dobička. To pomeni, da se jim, če prodajo največ en sesalec, vložek zagotovo ne povrne, če prodajo najmanj tri sesalce, pa se jim vložek zagotovo povrne. Če prodajo natanko dva sesalca, pa je to, ali se vložek povrne ali ne, odvisno od obresti: če so X_1 obresti od prvega, X_2 pa od drugega prodanega sesalca, sta X_1 in X_2 (pogojno na to, da so prodali natanko dva sesalca) neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 10]$. Vložek se povrne, če je $X_1 + X_2 \geq 10$ in pogojna verjetnost tega dogodka je natanko $1/2$.

Naj bo N število prodanih sesalcev. Le-to je porazdeljeno po Poissonu $\text{Pois}(2)$. Verjetnost, da se začetni vložek povrne, je enaka:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(N = 0) - \mathbb{P}(N = 1) - \frac{1}{2} \mathbb{P}(N = 2) &= 1 - \left(1 + 2 - \frac{2^2}{2!2}\right) e^{-2} = \\ &= 1 - 4e^{-2} \doteq 0.459. \end{aligned}$$

3. Najprej velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > t) &= \exp\left(-\int_0^t s ds\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \\ \mathbb{P}(T_2 > T_1 \mid T_1) &= \exp\left(-\int_{T_1}^{2T_1} s ds\right) = \exp\left(-\frac{3T_1^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Sledi:

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-t^2/2}, \quad f_{T_1}(t) = t e^{-t^2/2}$$

in končno:

$$\mathbb{P}(T_2 > T_1) = \int_0^\infty e^{-3t^2/2} f_{T_1}(t) dt = \int_0^\infty t e^{-2t^2} dt = \frac{1}{4}.$$

4. Gre za prenovitveni proces z nagradami, ki so v tem primeru globe. Ker je verjetnost, da Bine v posameznem ciklu plača globo, točno $1/2$, je njena pričakovana višina v posameznem ciklu 60 evrov. Nadalje je pričakovana dolžina cikla leto in pol, torej je dolgoročni letni znesek globe enak:

$$\frac{60}{3/2} = 40 \text{ evrov.}$$