Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 5. 9. 2011

Finančna matematika

1. Če igralec pritisne na gumb ob času t, je verjetnost, da bo dobil nagrado, enaka $1 - e^{-(3-t)}$, torej je pričakovana vrednost njegove nagrade enaka:

$$f(t) = \left(e^t - 1\right)\left(1 - e^{t-3}\right)$$

Iz:

$$f'(t) = -2\, e^{2t-3} + (e^{-3} + 1)e^t$$

dobimo, da je maksimum dosežen pri $t = \ln \dfrac{e^3 + 1}{2} \doteq 2{\cdot}355$ oziroma približno 2 min 21 s.

2. *Prvi način.* Naj bo T_1 čas, ko pride prva neprijazna stranka. Ker neprijazne stranke prihajajo z intenziteto $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ stranke na uro, je $T_1 \sim \mathrm{Exp}(1/2)$. Iz krepke lastnosti Markova sledi, da je pogojno na T_1 število strank, ki pridejo za prvo neprijazno stranko, porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(2(1 - T_1)\big)$, če je seveda $T_1 \le 1$. Če torej z A označimo dogodek, da pride natanko ena neprijazna stranka, za njo pa nobena stranka več, velja:

$$\mathbb{P}(A_1 \mid T_1) = \begin{cases} e^{-2(1-T_1)} & ; T_1 \le 1 \\ 0 & ; T_1 > 1 \end{cases} .$$

Torej je:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t/2}\, e^{-2(1-t)}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\, e^2} \int_0^1 e^{3t/2}\, \mathrm{d}t = \frac{e^{3/2} - 1}{3\, e^2} \doteq 0{\cdot}236 .$$

Drugi način. Če je N število vseh strank, ki pridejo v eni uri, je $N \sim \mathrm{Pois}(2)$. Nadalje, če spet z A označimo naš dogodek, velja $\mathbb{P}(A \mid N = 0) = 0$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ pa je $\mathbb{P}(A \mid N = n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$. Torej je:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2^n\, e^{-2}}{n!} = \frac{1}{2\, e^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{e^{3/2} - 1}{3\, e^2} .$$

3. Slučajni spremenljivki N_1 in $N_2 - N_1$ neodvisni in velja:

$$N_1 \sim \mathrm{Pois}\left(\int_0^1 t\, \mathrm{d}t\right) = \mathrm{Pois}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{in} \quad N_2 - N_1 \sim \mathrm{Pois}\left(\int_1^2 t\, \mathrm{d}t\right) = \mathrm{Pois}\left(\frac{3}{2}\right) .$$

Torej je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_1 N_2) &= \mathbb{E}\big(N_1^2 + N_1(N_2 - N_1)\big) = \\
&= \mathbb{E}(N_1^2) + \mathbb{E}(N_1)\,\mathbb{E}(N_2 - N_1) = \\
&= \operatorname{var}(N_1) + \big(\mathbb{E}(N_1)\big)^2 + \mathbb{E}(N_1)\,\mathbb{E}(N_2 - N_1) = \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \\
&= \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

4. a) Če s T_1 označimo čas do beračevega naslednjega prihoda, z D_t pa količino denarja, ki ga gospa Genovefa v času t da beraču, skoraj gotovo velja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D_t}{t} = \frac{a}{\mathbb{E}(T_1)} = a(1 + a^{-2}) = a + \frac{1}{a}\,,$$

kar je minimalno pri $a = 1$.

b) Če je čas do beračevega naslednjega prihoda porazdeljen eksponentno Exp(2), to pomeni, da beračevi prihodi tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo 2. Sprašujemo se po verjetnosti, da berač v eni časovni enoti pride več kot dvakrat (trikrat ali več) in verjetnost tega dogodka je enaka:

$$1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!}\right) \doteq 0\dot{}323\,.$$