Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
9. september 2013

1. Erazem odpre vrata v hišo, da prezrači, nakar začnejo vanjo leteti muhe v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 20 muh na uro (najprej v hiši ni muh). Brž ko prva muha prileti v hišo, jo Erazem začne loviti in jo po slučajnem času ujame. Ko ujame prvo muho oziroma ko v hišo prileti druga (kar se zgodi kasneje), zapre vrata, tako da v hišo ne prileti nobena muha več, in polovi vse muhe, ki so še v hiši. Čas, ki ga Erazem potrebuje, da ujame posamezno muho, je porazdeljen eksponentno s pričakovano vrednostjo 2 minuti. Privzamemo, da so časi lovljenja neodvisni tako med seboj kot tudi od procesa prihajanja muh v hišo.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je Erazem, ko je druga muha priletela v hišo, še vedno lovil prvo muho?

   b) Izračunajte pričakovano število muh, ki so priletele v hišo, medtem ko je Erazem lovil prvo muho.

   c) Izračunajte pričakovani čas, ki je minil od odprtja vrat do trenutka, ko je Erazem ujel zadnjo muho.

2. Ob časih, ki tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $1/3$, vržemo kovanec, na katerem z verjetnostjo $3/10$ pade cifra, z verjetnostjo $7/10$ pa grb. Kaj pade ob posameznem metu, je neodvisno tako od preostalih metov kot tudi od časov metov. Naj bo T čas, ko prvič vržemo kovanec, A pa dogodek, da 2 časovni enoti od začetka ni bilo nobenega grba. Izračunajte $\mathbb{E}(T \mid A)$.

3. Dan je nehomogen Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti:

$$\rho(t) = \frac{1}{2\,e^t - 1}\,.$$

   a) Kolikšna je verjetnost, da je bil v tem procesu sploh kakšen prihod?

   b) Izračunajte $\mathbb{E}(T)$, kjer je T čas *zadnjega* prihoda v tem procesu, če je bil kakšen prihod, sicer pa naj bo $T = 0$.

4. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Pogojno na celotno zgodovino do časa posameznega prihoda je le-ta z verjetnostjo $1 - e^{-\mu T}$ označen kot *sprejet*; tu je T čas, ki je minil od zadnjega prihoda. Izračunajte dolgoročno število sprejetih prihodov na časovno enoto.