Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 9. 9. 2013

Finančna matematika

1. a) Naj bo L_1 čas lovljenja prve muhe, T_2 pa čas, ki je minil od prihoda prve do prihoda druge muhe. To sta neodvisni slučajni spremenljivki ter velja $L_1 \sim \mathrm{Exp}(1/2)$ in $T_2 \sim \mathrm{Exp}(1/3)$ (čase merimo v minutah). Iskana verjetnost je:

$$\mathbb{P}(L_1 > T_2) = \frac{1}{6} \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-l/2}\, e^{-t/3}\, \mathrm{d}l\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-5t/6}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{5}\,.$$

b) Označimo z N število muh, ki so priletele v hišo, medtem ko je Erazem lovil prvo muho. Zaradi neodvisnosti velja $\mathbb{E}(N \mid L_1) = L_1/3$, torej $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(L_1)/3 = 2/3$.

c) Označimo s T čas, ki mine od odprtja vrat do trenutka, ko Erazem ujame zadnjo muho.

Prvi način. Pišimo $T = T_1 + T_2 + T'$, kjer je T_1 čas prihoda prve muhe, T_2 tako kot prej čas, ki mine od prihoda prve do prihoda druge muhe, T' pa preostanek časa. Nadalje naj bo U dogodek, da Erazem ujame prvo muho, preden prileti druga. Označimo še z L_2 čas lovljenja druge muhe.

Če se zgodi U, je preprosto $T' = L_2$. Zaradi neodvisnosti je $\mathbb{E}(T' \mid T_2, U) = \mathbb{E}(L_2) = 2$. Če pa se U ne zgodi, velja $T' = L_1' + L_2 + L'$, kjer je L_1' preostanek časa lovljenja prve muhe, L' pa čas lovljenja N muh, ki priletijo, medtem ko Erazem lovi prvo muho. Podobno kot prej je $\mathbb{E}(L_2 \mid T_2, U^\mathrm{c}) = 2$. Nadalje po krepki lastnosti Markova velja $\mathbb{E}(L_1' \mid T_2, U^\mathrm{c}) = 2$. Spet zaradi krepke lastnosti Markova in še neodvisnosti velja $\mathbb{E}(N \mid T_2, U^\mathrm{c}, L_1') = L_1'/3$. Spet zaradi neodvisnosti je $\mathbb{E}(L' \mid T_2, U^\mathrm{c}, L_1') = 2L_1'/3$, torej $\mathbb{E}(L' \mid T_2, U^\mathrm{c}) = 4/3$. Sledi $\mathbb{E}(T' \mid T_2, U^\mathrm{c}) = 2 + 2 + 4/3 = 16/3$.

Velja $\mathbb{P}(U^\mathrm{c} \mid T_2) = e^{-T_2/2}$. Iz pogojne različice izreka o polnem matematičnem upanju dobimo:

$$\mathbb{E}(T' \mid T_2) = \mathbb{P}(U \mid T_2)\, \mathbb{E}(T' \mid T_2, U) + \mathbb{P}(U^\mathrm{c} \mid T_2)\, \mathbb{E}(T' \mid T_2, U^\mathrm{c}) = 2 + \frac{10}{3}\, e^{-T_2/2}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T') = 2 + \frac{10}{3} \int_0^\infty e^{-t/2} \cdot \frac{1}{3}\, e^{-t/3}\, \mathrm{d}t = \frac{10}{3}\,.$$

Ker je $T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(1/3)$, je $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_2) = 3$, torej: in končno:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2)\, \mathbb{E}(T') = \frac{28}{3}\,.$$

Drugi način. Pišimo $T = T_1 + L_1 + T''$, kjer je T_1 čas prihoda prve muhe, L_1 tako kot prej čas lovljenja prve muhe, T'' pa preostanek časa. Označimo z N število muh, ki priletijo v hišo med lovljenjem prve muhe.

Če je $N = 0$, lahko pišemo $T'' = T_2'' + L_2$, kjer je T_2'' preostanek časa čakanja na drugo muho, L_2 pa čas njenega lovljenja. Po krepki lastnosti Markova je $\mathbb{E}(T_2'' \mid L_1, N = 0) = 3$ in $\mathbb{E}(L_2 \mid L_1, N = 0) = 2$, torej je $\mathbb{E}(T'' \mid L_1, N = 0) = 5$. Če pa je $N > 0$, je T'' preprosto čas lovljenja N muh. Zaradi neodvisnosti torej na dogodku $\{N > 0\}$ velja $\mathbb{E}(T'' \mid L_1, N) = 2N$. Krajše, velja $\mathbb{E}(T'' \mid L_1, N) = 2N + 5\,\mathbb{1}(N = 0)$.

Pogojno na L_1 je $N \sim \text{Pois}(L_1/3)$, torej je:

$$\mathbb{E}(T'' \mid L_1) = \frac{2L_1}{3} + 3\,e^{-L_1/3}\,.$$

Ker je $L_1 \sim \text{Exp}(1/2)$, nadalje velja:

$$\mathbb{E}(T'') = \frac{4}{3} + 5\int_0^\infty e^{-t/3} \cdot \frac{1}{2}\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \frac{13}{3}\,.$$

Končno je:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(L_1) + \mathbb{E}(T'') = 3 + 2 + \frac{13}{3} = \frac{28}{3}\,.$$

Vse količine imajo kot enoto privzeto minuto. Iskani pričakovani čas je torej 9 minut in 20 sekund.

2. Pogojno na A meti tvorijo nehomogen Poissonov proces, ki ima na intervalu $[0, 2]$ intenzivnost $1/3 \cdot 3/10 = 1/10$, medtem ko ima na intervalu $[2, \infty)$ polno intenzivnost $1/3$. Za $t \le 2$ torej velja:

$$\mathbb{E}(T > t \mid A) = e^{-t/10}\,,$$

medtem ko za $t \ge 2$ velja:

$$\mathbb{E}(T > t \mid A) = e^{-2/10 + (t-2)/3}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid A) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t \mid A)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 e^{-t/10}\,\mathrm{d}t + e^{-1/5}\int_0^\infty e^{-s/3}\,\mathrm{d}s = 10 - 7\,e^{1/5} \doteq$$
$$\doteq 4{\cdot}27\,.$$

3. a) Iskana verjetnost je enaka:

$$1 - \exp\left(-\int_0^\infty \frac{1}{2\,e^t - 1}\,\mathrm{d}t\right)\,.$$

S substitucijo $x = e^t$ dobimo, da je enaka:

$$1 - \exp\left(-\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(2x-1)}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\,.$$

b) Upoštevamo $\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$. Dogodek $\{T > t\}$ pomeni, da je bil v časovnem intervalu od t do ∞ vsaj en prihod. Njegova verjetnost je enaka:

$$1 - \exp\left(-\int_t^\infty \frac{1}{2\,e^s - 1}\,\mathrm{d}s\right) = 1 - \exp\left(-\int_{e^t}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x - 1}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{e^{-t}}{2}\,.$$

Torej je $\mathbb{E}(T) = 1/2$.

4. Dani proces lahko gledamo kot prenovitveni proces z nagradami: prihodi tvorijo kar Poissonov proces z dano intenzivnostjo, medtem ko je nagrada enaka 1, če je prihod sprejet, sicer pa 0. Pričakovana vrednost nagrade je enaka verjetnosti, da bo prihod sprejet. Ker je $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, je slednja verjetnost enaka:

$$p = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\mu t}\right) \lambda \, e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \, .$$

Dolgoročno število sprejetih prihodov na časovno enoto pa je enako:

$$\lambda p = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \, .$$