Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

SLUČAJNI PROCESI 1

1. kolokvij

8. april 2010

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna številka: ____________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, rešiti morate vse. Skupaj lahko zberete 50 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, na katerem so naloge.

Vse odgovore utemeljite. Na voljo imate 90 minut. Veliko uspeha!

Naloga	a	b	c	d	e	Skupaj
1.				•	•	
2.						
3.					•	
4.			•	•	•	
Skupaj	•	•	•	•	•	

1. naloga [10 točk]

Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, vse porazdeljene enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Naj bo $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ in $Y_n = n(1 - M_n)$.

(a) Določite porazdelitev spremenljivke M_n.

(b) Določite porazdelitev spremenljivke Y_n.

(c) Dokažite, da zaporedje slučajnih spremenljivk Y_n po zakonu konvergira k spremenljivki Y, ki je porazdeljena eksponentno s parametrom 1.

2. naloga [10 točk]

Receptorka sprejema telefonske klice. Privzemite, da pojavljanje telefonskih klicev lahko opišete s Poissonovim procesom z intenzivnostjo 4/uro. Dolžino klicev zanemarite.

(a) Izračunajte verjetnost, da receptorka v prvi uri dela sprejme manj kot dva klica.

(b) Privzemite, da je v prvi uri receptorka sprejela 6 telefonskih klicev. Kakšna je verjetnost, da bo v naslednji uri sprejela manj kot dva klica?

(c) Privzemite, da je receptorka v prvih dveh urah prejela 6 klicev. Kakšna je pogojna verjetnost, da je v prvi uri prejela natanko 2 klica, v drugi uri pa natanko 4?

(d) Privzemite, da je receptorka v prvih dveh urah prejela 6 klicev. Naj bo X čas, ki je minil od zadnjega prejetega klica do izteka 2 ur. Izračunajte pogojno matematično upanje spremenljivke X.

(e) Privzemite, da receptorka po vsakem desetem prejetem klicu odide na kavo. Koliko časa v povprečju trajajo njena delovna obdobja.

3. naloga [15 točk]

Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bo $c > 0$ konstanta. Za $t \in [0, c]$ definiramo slučajni proces

$$X_t = N_t - \frac{t}{c} N_c.$$

(a) Dokažite, da sta X_0 in X_c nepravi slučajni spremenljivki.

(b) Izračunajte avtokovariančno funkcijo procesa $\{X_t\}_{t\in[0,c]}$. Rezultat poenostavite.

(c) Pri katerem t je disperzija spremenljivke X_t največja in koliko takrat znaša?

(d) Naj bo $0 < s < t < c$. Dokažite, da je $X_t - X_s$ porazdeljena enako kot X_{t-s}.

4. naloga [15 točk]

Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Za $t \geq 0$ definiramo slučajni proces

$$X_t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t.$$

(a) Dokažite, da je $X_t \in L^1$, to je $\mathrm{E}(|X_t|) < \infty$.

Nasvet: Trikotniška neenakost.

(b) Dokažite, da je X_t martingal glede na naravno filtracijo $\mathcal{F}_t$.