1. naloga [10 točk]

Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, vse porazdeljene enakomerno na intervalu $[0,1]$. Naj bo $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ in $Y_n = n(1 - M_n)$.

3 (a) Določite porazdelitev spremenljivke M_n.

PAZI NA ZALOGE VREDNOSTI !

4 (b) Določite porazdelitev spremenljivke Y_n.

3 (c) Dokažite, da zaporedje slučajnih spremenljivk Y_n po zakonu konvergira k spremenljivki Y, ki je porazdeljena eksponentno s parametrom 1.

(a) Določimo porazdelitveno funkcijo : $x \in [0,1]$

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \le x) =$$

$$= P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le x) =$$

$$= P(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x) = \quad \text{neodvisnost} \quad 1$$

$$= P(X_1 \le x) \ldots P(X_n \le x) = \quad X_i \sim U[0,1] \quad 1$$

$$= x^n$$

$\Rightarrow$ gostota $f_{M_n}(x) = F'_{M_n}(x) = n x^{n-1}$ za $x \in [0,1]$ 1

$f_{M_n}(x) = 0$ sicer

(b) Določimo porazdelitveno funkcijo : $M_n \in [0,1]$

$\Rightarrow n(1-M_n) \in [0,n]$

$\Rightarrow$ vzamemo $x \in [0,n]$ 1

$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n \le x) = \quad 1$$

$$= P(n(1-M_n) \le x) =$$

$$= P\left(1 - M_n \le \frac{x}{n}\right) =$$

$$= P\left(-M_n \le \frac{x}{n} - 1\right) =$$

$$= P\left(M_n \ge 1 - \frac{x}{n}\right) =$$

$$= 1 - P\left(M_n < 1 - \frac{x}{n}\right) = \quad \text{zvezna gostota}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \quad 2$$

še gostota:

$$f_{Y_n}(x) = F_{Y_n}'(x) = -n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \quad \text{za} \quad x \in [0,n]$$

$f_{Y_n}(x) = 0$ sicer

ⓒ Izračunamo limito porazdelitvenih funkcij

$$F_{Y_n}(x) = \left[1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \cdot 1_{[0,n]} \quad 1$$

$$\lim_{n\to\infty} 1_{[0,n]} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{x}}\right)^{-\frac{n}{x}\cdot(-x)} = e^{-x} \quad 1$$

$$F_{Y_n}(x) \longrightarrow \underbrace{1-e^{-x}}_{} = F(x)$$

to pa je porazdelitvena funkcija spremenljivke $Y \sim Exp(1)$ 1

$F(x)$ zvezna na celem $\mathbb{R}$

$\Rightarrow Y_n \to Y \sim Exp(1)$

2. naloga [10 točk]

Receptorka sprejema telefonske klice. Privzemite, da pojavljanje telefonskih klicev lahko opišete s Poissonovim procesom z intenzivnostjo 4/uro. Dolžino klicev zanemarite.

2 (a) Izračunajte verjetnost, da receptorka v prvi uri dela sprejme manj kot dva klica.

1 (b) Privzemite, da je v prvi uri receptorka sprejela 6 telefonskih klicev. Kakšna je verjetnost, da bo v naslednji uri sprejela manj kot dva klica?

2 (c) Privzemite, da je receptorka v prvih dveh urah prejela 6 klicev. Kakšna je pogojna verjetnost, da je v prvi uri prejela natanko 2 klica, v drugi uri pa natanko 4?

4 (d) Privzemite, da je receptorka v prvih dveh urah prejela 6 klicev. Naj bo X čas, ki je minil od zadnjega prejetega klica do izteka 2 ur. Izračunajte pogojno matematično upanje spremenljivke X.

1 (e) Privzemite, da receptorka po vsakem desetem prejetem klicu odide na kavo. Koliko časa v povprečju trajajo njena delovna obdobja.

N_t = število klicev, prejetih do trenutka t

N_t homogen Poissonov proces : $\lambda = 4$/uro

(a) $P($v prvi uri manj kot dva klica$) =$

$= P(N_1 = 0) + P(N_1 = 1) =$ 1

$= e^{-\lambda \cdot 1} + e^{-\lambda \cdot 1} \dfrac{\lambda \cdot 1}{1!} =$

$= e^{-\lambda}(1+\lambda) =$

$= e^{-4}(1+4) =$

$= 5e^{-4} = 0{,}0916$ 1

(b) Neodvisnost prirastkov: 1 $N_2 - N_1 \sim N_1 - N_0 = N_1$

$\Rightarrow P($v drugi uri manj kot 2 klica$) =$

$= P(N_2 - N_1 < 2) =$

$= P(N_1 < 2) =$

$= 5e^{-4}$

(c) $P(N_1=2 \mid N_2=6) = \dfrac{P(N_1=2,\ N_2=6)}{P(N_2=6)} =$

$$= \frac{P(N_1=2,\ N_2-N_1=4)}{P(N_2=6)} = \frac{P(N_1=2)\cdot P(N_2-N_1=4)}{P(N_2=6)} = \quad 1$$

$$= \frac{P(N_1=2)\cdot P(N_1=4)}{P(N_2=6)} = \qquad N_1 \sim \text{Pois}(\lambda) = \text{Pois}(4), \quad N_2 \sim \text{Pois}(2\lambda) = \text{Pois}(8)$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}}\frac{\lambda^2}{2!}\cdot \cancel{e^{-\lambda}}\frac{\lambda^4}{4!}}{\cancel{e^{-2\lambda}}\frac{(2\lambda)^6}{6!}} = \quad 1$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^6}\ 6!}{2!\ 4!\ 2^6 \cancel{\lambda^6}} = \frac{3\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{8}\cdot 2^6} = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64} = 0{,}2344$$

(d) $X = 2 - S_6$

pogojno na $N_2 = 6$

$$E(X \mid N_2=6) = E(2 - S_6 \mid N_2=6) = \quad 1$$

$$= 2 - E(S_6 \mid N_2=6) =$$

$$= 2 - E(U_{(6)}) \quad 1$$ kjer je $U_1, \dots, U_6$ NEP $U[0,2]$

↳ $U_{(6)}$ je v resnici maximum!

Določimo porazdelitev $U_{(6)}$; $x \in [0,2]$

$$P(U_{(6)} \le x) = P(U_1, \dots, U_6 \le x) =$$

$$= P(U_1 \le x) \cdots P(U_6 \le x) =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^6 \quad 1$$

$f_{U_{(6)}}(x) = 6\left(\frac{x}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = 3\left(\frac{x}{2}\right)^5$ na $[0,2]$

$$E(U_{(6)}) = \int_0^2 x\, 3\,\frac{x^5}{2^5}\,dx = \frac{3}{2^5}\,\frac{x^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{3}{2^5}\cdot\frac{2^7}{7} = \frac{3\cdot 4}{7} = \frac{12}{7} \quad 1$$

$$\Rightarrow E(X \mid N_2=6) = 2 - \frac{12}{7} = \frac{2}{7}$$

(2e) Homogenost ⇒ povsod enako

Receptorka dela od časa 0 do S_{10}

$S_{10} = T_1 + \dots + T_{10}$, kjer so T_i NEP $Exp(\lambda) = Exp(4)$

medprihodni časi

$$\Rightarrow E(S_{10}) = 10 \cdot E(T_1) = 10 \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{10}{4} = 2{,}5 \text{ ure}$$

1

3. naloga [15 točk]

Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ in naj bo $c > 0$ konstanta. Za $t \in [0, c]$ definiramo slučajni proces

$$X_t = N_t - \frac{t}{c} N_c.$$

4 (a) Dokažite, da sta X_0 in X_c nepravi slučajni spremenljivki. KONSTANTNI

7 (b) Izračunajte avtokovariančno funkcijo procesa $\{X_t\}_{t\in[0,c]}$. POENOSTAVI REZULTAT

4 (c) Pri katerem t je disperzija spremenljivke X_t največja? KOLIKO ZNAŠA

(a)
$$\left.\begin{aligned} X_0 &= N_0 - 0 = N_0 = 0 \\ X_c &= N_c - \frac{c}{c} N_c = 0 \end{aligned}\right\}$$
konstanti

$\Rightarrow$ nepravi porazdelitvi 2+2

(b) $cov(X_t, X_s) =$ $\quad s, t \in [0, c]$

$= cov\left(N_t - \frac{t}{c} N_c, N_s - \frac{s}{c} N_c\right) = 1$

samo razpis $E(XY) - E(X)E(Y)$ 1 točka

$= cov(N_t, N_s) - \frac{t}{c} cov(N_c, N_s) - \frac{s}{c} cov(N_t, N_c) + \frac{st}{c^2} cov(N_c, N_c) =$ 1

$= \lambda \min\{t, s\} - \frac{t}{c}\lambda \min\{c, s\} - \frac{s}{c}\lambda \min\{t, c\} + \frac{st}{c^2}\lambda \min\{c, c\} = 2$

upoštevamo $t, s < c$ 2

$= \lambda \min\{t, s\} - \lambda \frac{t}{c} \cdot s - \lambda \frac{s}{c} \cdot t + \lambda \frac{st}{c^2} \cdot c =$

$= \lambda \min\{t, s\} - \lambda \frac{ts}{c} - \lambda \cancel{\frac{ts}{c}} + \lambda \cancel{\frac{ts}{c}} =$

$= \lambda \min\{t, s\} - \lambda \frac{ts}{c}$ 1

(c) $D(X_t) = cov(X_t, X_t) =$

$= \lambda \min\{t, t\} - \frac{\lambda t^2}{c} =$

$= \underbrace{\lambda t - \lambda \frac{t^2}{c}}$ 1

kvadratna funkcija z ničlama $t = 0$, $t = c$ in negativnim vodilnim koeficientom 1

$\Rightarrow$ maximum dosežen pri $t = \frac{c}{2}$ 1

in znaša $\frac{\lambda c}{4}$ 1

4. naloga [15 točk]

Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Za $t \geq 0$ definiramo slučajni proces

$$X_t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t.$$

5 (a) Dokažite, da je $X_t \in L^1$, to je $E(|X_t|) < \infty$.

Nasvet: Trikotniška neenakost.

10 (b) Dokažite, da je X_t martingal glede na naravno filtracijo $\mathcal{F}_t$.

(a) $E(|X_t|) = E(|(N_t-\lambda t)^2 - \lambda t|) \leq$

$\leq E(|(N_t-\lambda t)^2| + |\lambda t|) =$ 2

$= E((N_t - \lambda t)^2) + E(\lambda t) =$ 1

$\lambda t = E(N_t)$

$= D(N_t) + \lambda t =$

$= \lambda t + \lambda t =$

$= 2\lambda t < \infty$ 2

$D(N_t) = cov(N_t, N_t) =$

$= \lambda t$

(Poissonova!)

(b) Računamo $E(X_t | \mathcal{F}_s) =$ 2 $(s<t)$

$= E((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t \mid \mathcal{F}_s) =$

$= E((N_t - N_s + N_s - \lambda t)^2 - \lambda t \mid \mathcal{F}_s) =$

$= E((N_t - N_s)^2 + 2(N_t - N_s)(N_s - \lambda t) + (N_s - \lambda t)^2 - \lambda t \mid \mathcal{F}_s) =$

$= \underbrace{E((N_t-N_s)^2 \mid \mathcal{F}_s)}_{\text{neodvisno}} + 2\underbrace{E((N_t-N_s)\underbrace{(N_s-\lambda t)}_{\text{merljivo}} \mid \mathcal{F}_s)}_{\text{neodvisno}} + E(\underbrace{(N_s-\lambda t)^2}_{\text{merljivo}} \mid \mathcal{F}_s) - \lambda t =$

5

$= E((N_t - N_s)^2) + 2E(N_t - N_s)\cdot(N_s - \lambda t) + (N_s - \lambda t)^2 - \lambda t =$

$= E(N_{t-s}^2) + 2(N_s - \lambda t)E(N_{t-s}) + (N_s - \lambda t)^2 - \lambda t =$

$= (t-s)\lambda + \lambda^2(t-s)^2 + 2(N_s - \lambda t)(t-s)\lambda + (N_s - \lambda t)^2 - \lambda t =$

$$E(N_t^2) = D(N_t) + E(N_t)^2 =$$
$$= \lambda t + (\lambda t)^2$$

$$= \cancel{\lambda t} - \lambda s + \underline{\lambda^2 t^2} - 2\lambda^2 ts + \underline{\lambda^2 s^2} + (2t\lambda - 2s\lambda)(N_s - \lambda t) +$$
$$+ N_s^2 - 2\lambda t N_s + \underline{\lambda^2 t^2} - \cancel{\lambda t}$$

$$= -\lambda s + \cancel{2\lambda^2 t^2} - \cancel{2\lambda^2 ts} + \cancel{2t\lambda N_s} - 2\lambda s N_s - \cancel{2t^2\lambda^2} - \cancel{2s\lambda^2 t} +$$
$$+ N_s^2 - \cancel{2\lambda t N_s} + \lambda^2 s^2 =$$

$$= N_s^2 - 2\lambda s N_s + \lambda^2 s^2 - \lambda s =$$
$$= (N_s - \lambda s)^2 - \lambda s =$$
$$= X_s \checkmark$$

3