Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 22. 4. 2011

Finančna matematika

1. a) Označimo s T_1 čas, ko Tone dobi prvo nalogo, z N_4 pa število vseh nalog, ki jih je dobil v prvih štirih urah službe (če je $N_4 = 0$, vzamemo $T_1 > 4$). Nadalje naj bo T označimo čas, ki ga Tone prebije v službi.

Prvi način. Velja:

$$T = \begin{cases} T_1 + 4N_4 & ; T_1 \leq 4 \\ 4 & ; T_1 > 4 \end{cases} .$$

Če je $T_1 \leq 4$, je pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke $N_4 - 1$ glede na T_1 Poissonova $\mathrm{Pois}\big((4-T_1)/2\big)$. Zato je $\mathbb{E}(N_4 - 1 \mid T_1) = 2 - T_1/2$ oziroma $\mathbb{E}(N_4 \mid T_1) = 3 - T_1/2$, od koder sledi $\mathbb{E}(T \mid T_1) = 12 - T_1$. Ker je čas T_1 porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(1/2)$, potem velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_0^4 (12 - t) \cdot \tfrac{1}{2}\, e^{-t/2}\, \mathrm{d}t + 4 \int_4^\infty \tfrac{1}{2}\, e^{-t/2}\, \mathrm{d}t = \\ &= (2t - 10)e^{-t/2}\Big|_0^4 + 4\, e^{-t/2}\Big|_4^\infty = \\ &= 10 - 2\, e^{-2} \doteq 9{\cdot}73\,. \end{aligned}$$

Drugi način. Pišemo $T = \hat{T}_1 + 4N_4$, kjer je $\hat{T}_1 = 4$, če je $N_4 = 0$, in $\hat{T}_1 = T_1$, če je $N_4 > 0$. Če je $n \in \mathbb{N}$, je pogojno na $N_4 = n$ slučajna spremenljivka T_1 porazdeljena tako kot prva vrstilna statistika slučajnega vektorja iz neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih enakomerno na $[0, 4]$. Z drugimi besedami, če so $U_1, \ldots U_n$ take slučajne spremenljivke, se pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke $\hat{T}_1$ glede na $N_4 = n$ ujema z brezpogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke $\min\{U_1, \ldots U_n\}$. Iz funkcije preživetja:

$$1 - F_{\hat{T}|N_4=n}(t) = \mathbb{P}\big(\min\{U_1, \ldots U_n\} > t\big) = \mathbb{P}(U_1 > t, \ldots U_n > t) = \left(1 - \frac{t}{4}\right)^n$$

dobimo gostoto:

$$f_{\hat{T}|N_4=n}(t) = \frac{n}{4}\left(1 - \frac{t}{4}\right)^{n-1}$$

(oba računa veljata za $0 < t < 4$; zunaj tega intervala lahko postavimo $f_{\hat{T}|N_4=n}(t) = 0$). Sledi:

$$\mathbb{E}(\hat{T} \mid N_4 = n) = \frac{n}{4} \int_0^4 t \left(1 - \frac{t}{4}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = 4n \int_0^1 (1 - u)u^{n-1}\, \mathrm{d}u = \frac{4}{n+1}\,.$$

Račun smo izpeljali za $n \in \mathbb{N}$, opazimo pa, da je pravilen tudi za $n = 0$. Od tod dobimo še brezpogojno matematično upanje:

$$\mathbb{E}(\hat{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\, e^{-2}}{n!} \frac{4}{n+1} = 2\, e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 2\, e^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 2 - 2\, e^{-2}\,.$$

in končno $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(\hat{T}) + \mathbb{E}(N_4) = 10 - 2\, e^{-2}$.

Tretji način. Opazimo, da velja $T = \min\{T_1, 4\} + 4N_4$. Iz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\min\{T_1, 4\}\big] &= \int_0^4 t \cdot \tfrac{1}{2}\, e^{-t/2}\, \mathrm{d}t + 4 \int_4^{\infty} \tfrac{1}{2}\, e^{-t/2}\, \mathrm{d}t = \\
&= (-t-2)e^{-t/2}\Big|_0^4 - 2\, e^{-t/2}\Big|_4^{\infty} = \\
&= 2 - 2\, e^{-2}
\end{aligned}$$

in $\mathbb{E}(N_4) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ tako kot prej dobimo $\mathbb{E}(T) = 10 - 2\, e^{-2}$.

b) Najprej izračunamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 17) &= 1 - \mathbb{P}(T \le 17) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_1 \le 1, N_4 \le 4) - \mathbb{P}(T_1 > 1, N_4 \le 3) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(N_4 \le 3) - \mathbb{P}(T_1 \le 1, N_4 = 4)\,.
\end{aligned}$$

Od tod naprej gre na vsaj dva načina.

Prvi način. Ker je, kot smo že omenili, za $T_1 \le 4$ pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke $N_4 - 1$ glede na T_1 Poissonova $\mathrm{Pois}\big(2 - \frac{1}{2}T_1\big)$, velja:

$$\mathbb{P}(N_4 = 4 \mid T_1) = \mathbb{P}(N_4 - 1 = 3 \mid T_1) = \frac{(2 - \frac{1}{2}T_1)^3}{6}\, e^{-(2 - T_1/2)}\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \le 1, N_4 = 4) &= \int_0^1 \frac{(2 - \frac{1}{2}t)^3}{6}\, e^{-(2-t/2)} \cdot \frac{1}{2}\, e^{-t/2}\, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{96\, e^2} \int_0^1 (4-t)^3\, \mathrm{d}t = \frac{1}{96\, e^2} \int_3^4 u^3\, \mathrm{d}u = \frac{175}{384\, e^2}\,.
\end{aligned}$$

in končno:

$$\mathbb{P}(T > 17) = 1 - \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6}\right) e^{-2} - \frac{175}{384\, e^2} = 1 - \frac{2607}{384\, e^2} \doteq 0{\cdot}0812\,.$$

Drugi način. Uporabimo, da se pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke T_1 glede na $N_4 = 4$ ujema z brezpogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke

$\min\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, kjer so $U_1, \dots U_4$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na intervalu $[0, 4]$. Dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \le 1 \mid N_4 = 4) &= \mathbb{P}\big(\min\{U_1, U_2, U_3, U_4\} \le 1\big) = \\
&= 1 - \mathbb{P}\big(\min\{U_1, U_2, U_3, U_4\} > 1\big) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(U_1 > 1, U_2 > 1, U_3 > 1, U_4 > 1) = \\
&= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \\
&= \frac{175}{256}\,.
\end{aligned}$$

Sledi:

$$\mathbb{P}(T_1 \le 1, N_4 = 4) = \frac{2^4\, e^{-2}}{24} \cdot \frac{175}{256} = \frac{175}{384\, e^2}\,,$$

kar je seveda isto kot prej.

2. Označimo z N_s število potnikov, ki pridejo na postajo do vključno časa s. Od tod naprej gre na vsaj štiri načine.

Prvi način. Velja $W = (t - S_1) + (t - S_2) + \ldots + (t - S_{N_t}) = N_t t - S_1 - \ldots - S_{N_t}$, kjer so $S_1, S_2, \ldots$ časi prihodov potnikov. Pri $N_t = n$ čase prihodov $S_1, \dots S_n$ na slepo in neodvisno premešamo. Dobljeni časi, ki jih označimo z $\tilde{S}_1, \dots \tilde{S}_n$, so pogojno na $N_t = n$ neodvisni in porazdeljeni enakomerno na $[0, t]$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W \mid N_t = n) &= nt - n\,\frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}\,, \\
\operatorname{var}(W \mid N_t = n) &= n\,\frac{t^2}{12}\,, \\
\mathbb{E}(W^2 \mid N_t = n) &= \frac{nt^2}{12} + \left(\frac{nt}{2}\right)^2 = \frac{nt^2}{12} + \frac{n^2t^2}{4}\,.
\end{aligned}$$

Nadalje iz:

$$\mathbb{E}(N_t) = \operatorname{var}(N_t) = \lambda t\,, \quad \mathbb{E}(N_t^2) = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W) &= \frac{t}{2}\,\mathbb{E}(N_t) = \frac{\lambda t^2}{2}\,, \\
\mathbb{E}(W^2) &= \frac{t^2}{12}\,\mathbb{E}(N_t) + \frac{t^2}{4}\,\mathbb{E}(N_t^2) = \frac{\lambda t^3}{3} + \frac{\lambda^2 t^4}{4}\,, \\
\operatorname{var}(W) &= \frac{\lambda t^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

Drugi način. Naj bodo $\tilde{S}_1, \dots \tilde{S}_n$ kot pri prvem načinu. Za $N_t = n$ pišimo $W = (t - \tilde{S}_1) + \cdots + (t - \tilde{S}_n)$ in opazimo, da so pogojno na ta dogodek tudi slučajne spremenljivke $t - \tilde{S}_1, \dots t - \tilde{S}_n$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na $[0, t]$. Od

tod sledi naslednje: če so $U_1, U_2, \ldots$ porazdeljene enakomerno na $[0,t]$ ter neodvisne med seboj in od N_t, je W porazdeljena enako kot $U_1 + U_2 + \ldots + U_{N_t}$. Če označimo $\mu = \mathbb{E}(U_i)$ in $\sigma^2 = \operatorname{var}(U_i)$, potem velja:

$$\operatorname{var}(W) = \mathbb{E}(N_t)\,\sigma^2 + \operatorname{var}(N_t)\,\mu^2 = \lambda t \left[\frac{t^2}{12} + \left(\frac{t}{2}\right)^2\right] = \frac{\lambda t^3}{3}\,.$$

Tretji način. Varianco razčlenimo na pojasnjeno in nepojasnjeno:

$$\operatorname{var}(W) = \operatorname{var}\bigl(\mathbb{E}(W \mid N_t)\bigr) + \mathbb{E}\bigl(\operatorname{var}(W \mid N_t)\bigr)\,.$$

Iz:

$$\mathbb{E}(W \mid N_t = n) = \frac{nt}{2} \quad \text{oziroma} \quad \mathbb{E}(W \mid N_t) = \frac{N_t t}{2}$$

dobimo:

$$\operatorname{var}\bigl(\mathbb{E}(W \mid N_t)\bigr) = \frac{t^2}{4}\operatorname{var}(N_t^2) = \frac{\lambda t^3}{4}\,.$$

Iz:

$$\operatorname{var}(W \mid N_t = t) = \frac{nt^2}{12} \quad \text{oziroma} \quad \operatorname{var}(W \mid N_t) = \frac{N_t t^2}{12}$$

pa dobimo:

$$\mathbb{E}\bigl(\operatorname{var}(W \mid N_t)\bigr) = \frac{t^2}{12}\,\mathbb{E}(N_t) = \frac{\lambda t^3}{12}\,.$$

Sledi $\operatorname{var}(W) = \dfrac{\lambda t^3}{3}$ (delež pojasnjene variance je 3/4, nepojasnjene pa 1/4).

Četrti način. Upoštevamo:

$$W = \int_0^t N_u \,\mathrm{d}u\,.$$

Iz Fubinijevega izreka sledi:

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}\left[\int_0^t N_u \,\mathrm{d}u\right] = \int_0^t \mathbb{E}(N_u)\,\mathrm{d}u\,,$$

$$\mathbb{E}(W^2) = \mathbb{E}\left[\int_0^t N_u \,\mathrm{d}u \int_0^t N_v \,\mathrm{d}v\right] = \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}(N_t N_s)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

in nato še:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(W) &= \mathbb{E}(W^2) - \big(\mathbb{E}(W)\big)^2 = \\
&= \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}(N_u N_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}(N_u)\,\mathbb{E}(N_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \int_0^t \int_0^t \operatorname{cov}(N_u, N_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \lambda \int_0^t \int_0^t |u-v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= 2\lambda \int_0^t \int_0^u (u-v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \frac{\lambda t^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

3. a) Igralec dobi igro, če pride med časoma s in 1 do natanko enega zvonjenja. Ker je število zvonjenj v tem časovnem intervalu porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(\lambda(1-s)\big)$, je verjetnost dogodka, da igralec dobi igro, enaka:

$$\lambda(1-s)\,e^{-\lambda(1-s)}\,.$$

b) Funkcija $t \mapsto t\,e^{-t}$ na intervalu $[0,1]$ narašča, pri $t=1$ doseže maksimum e^{-1}, na intervalu $[1,\infty)$ pa pada. Namesto t zdaj vstavimo izraz $\lambda(1-s)$, ki lahko preteče interval od 0 do λ. Če je $\lambda < 1$, torej ta izraz ne more doseči 1 in maksimum je dosežen pri $s=0$, maksimalna verjetnost, da igralec dobi igro, pa je $\lambda\,e^{-\lambda}$. Pri $\lambda \geq 1$ pa izraz $\lambda(1-s)$ doseže vrednost 1 pri $s=(\lambda-1)/\lambda$ in maksimalna verjetnost, da igralec dobi igro, je e^{-1}.

4. *Prvi način.* Označimo z S_{F} čas, ob katerem Franc dobi drugi namig, z S_{D} pa čas, ob katerem pride prvi izmed drugih kupcev. Franc dobi sliko, če je $S_{\mathrm{F}} < S_{\mathrm{D}}$. Velja $S_{\mathrm{F}} \sim \mathrm{Gama}(2,\lambda)$ in $S_{\mathrm{D}} \sim \mathrm{Exp}(\lambda/2)$. Gostoti teh dveh porazdelitev sta (za $x, y > 0$):

$$f_{S_{\mathrm{F}}}(x) = \lambda^2 x\,e^{-\lambda x}\,, \quad f_{S_{\mathrm{D}}}(y) = \frac{\lambda}{2}\,e^{-\lambda y/2}\,.$$

in velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{\mathrm{F}} < S_{\mathrm{D}}) &= \int_0^\infty f_{S_{\mathrm{F}}}(x) \int_x^\infty f_{S_{\mathrm{D}}}(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\lambda^3}{2} \int_0^\infty x\,e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \int_x^\infty e^{-\lambda y/2}\,\mathrm{d}y = \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty x\,e^{-3\lambda x/2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{4}{9}\,.
\end{aligned}$$

Drugi način. Iz teorije markiranja sledi, da je dogodek, da Franc dobi sliko, neodvisen od združenega procesa namigov in prihodov drugih kupcev (pri čemer v združenem procesu pozabimo, kaj je namig Francu in kaj je prihod drugega kupca). Če z N_t označimo število namigov in s K_t število drugih kupcev do časa t, z F pa dogodek, da Franc dobi sliko, je torej dogodek F neodvisen od nabora slučajnih spremenljivk $N_t + K_t$, $t \geq 0$. Njegova verjetnost se potem ujema s pogojno verjetnostjo glede na kateri koli dogodek s pozitivno verjetnostjo, ki se izraža le z $N_t + K_t$. Tak je tudi dogodek $\{N_t + K_t = 2\}$ za poljuben $t > 0$. Na tem dogodku se dogodek F ujema z dogodkom, da je $N_t = 2$. Torej velja:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(N_t = 2 \mid N_t + K_t = 2) = \frac{\mathbb{P}(N_t = 2, K_t = 0)}{\mathbb{P}(N_t + K_t = 2)} = \frac{\mathbb{P}(N_t = 2)\,\mathbb{P}(K_t = 0)}{\mathbb{P}(N_t + K_t = 2)}\,.$$

Ker je $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$, $K_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t/2)$ in $N_t + K_t \sim \mathrm{Pois}(3\lambda t/2)$, sledi:

$$\mathbb{P}(F) = \frac{\dfrac{(\lambda t)^2\, e^{-\lambda}}{2!}\, e^{-\lambda/2}}{\dfrac{\left(\frac{3\lambda t}{2}\right)^2\, e^{-3\lambda t/2}}{2!}} = \frac{4}{9}\,.$$

Tretji način. Namige in prihode drugih kupcev spet združimo v enoten proces, ki je spet Poissonov tok z intenziteto $\lambda + \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2}$. Pogojno na združeni proces je posamezen pojav namig Francu z verjetnostjo $\lambda / \frac{3\lambda}{2} = \frac{2}{3}$ in prihod drugega kupca z verjetnostjo $\frac{\lambda}{2} / \frac{3\lambda}{2}$, tipi posameznih pojavov pa so med seboj neodvisni.
Franc dobi sliko natanko tedaj, ko sta prva dva pojava v združenem procesu namiga. Po prejšnjem je pogojna verjetnost tega dogodka glede na združeni proces, enaka $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, ne glede na izid združenega procesa. Sledi, da je tudi brezpogojna verjetnost tega dogodka enaka 4/9.