Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 19. 4. 2012

Finančna matematika

1. *Prvi način.* Če tako kot ponavadi z N_t označimo število meritev do časa t brez začetne meritve, velja $\mathbb{P}(T > t \mid N_t = n) = 1/(n+1)$. Sledi:

$$\mathbb{P}(T > t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{(\lambda t)^n \, e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t}$$

in s tem je porazdelitev natančno opisana. Je zvezna in z odvajanjem dobimo gostoto:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}}{\lambda t^2} & ; \ t > 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

Drugi način. Označimo z F kumulativno porazdelitveno funkcijo in z f gostoto porazdelitve posamezne meritve. Nadalje naj bo še X_0 prva izmerjena vrednost. Če je $X_0 = x$, čakamo na prvo meritev, kjer izmerimo več od x. Verjetnost, da je posamezna meritev večja od x, je $1 - F(x)$. Če torej naredimo redčenje procesa vseh meritev, pri čemer odbiramo le tiste, ki dajo vrednost, večjo od x, dobimo, da le-te tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda\big(1 - F(x)\big)$. Čas čakanja na prvo meritev z vrednostjo, večjo od x, je torej porazdeljen eksponentno s parametrom $\lambda\big(1 - F(x)\big)$. Sledi:

$$\mathbb{P}(T > t \mid X_0) = e^{-\lambda(1 - F(X_0))t} , \qquad \mathbb{P}(T > t) = \int_0^\infty e^{-\lambda(1-F(x))t} \, f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

S substitucijo $u = F(x)$ dobimo:

$$\mathbb{P}(T > t) = \int_0^1 e^{-\lambda(1-u)t} \, \mathrm{d}u = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} ,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

Tretji način. Označimo s K število meritev (brez začetne) do prve, ki preseže začetno. Velja:

$$\mathbb{P}(K = k) = \frac{1}{k(k+1)} ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

in pogojno na $K = k$ ima slučajna spremenljivka T porazdelitev Gama(k, λ), torej za $t > 0$ pogojno gostoto:

$$f_{T|K=k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \, e^{-\lambda t} \, .$$

Brezpogojno gostoto dobimo s seštetjem:

$$f_T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(K = k)\, f_{T|K=k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k+1)!}\, e^{-\lambda t} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{l+1} t^l}{(l+2)!}\, e^{-\lambda t} =$$
$$= \frac{1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}}{\lambda t^2}\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

2. *Prvi način.* Ker prihodi, ki so se zgodili pred več kot eno časovno enoto, nimajo učinka, se je dovolj omejiti na časovni interval dolžine 1, brez škode za splošnost kar na $[0, 1]$. Pogojno na dogodek, da se je v tem intervalu zgodilo natanko n prihodov, je množica njihovih časov porazdeljena enako kot množica $\{U_1, U_2, \ldots U_n\}$, kjer so $U_1, \ldots U_n$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na $[0, 1]$. Prihod, ki se je zgodil ob času t, ima učinek t. Če torej z N_1 označimo število vseh šokov v časovnem intervalu $[0, 1]$, z S pa njihov skupni učinek, velja:

$$\mathbb{E}(S \mid N_1 = n) = \mathbb{E}(U_1 + U_2 + \cdots + U_n) = \frac{n}{2}\,,$$

oziroma $\mathbb{E}(S \mid N_1) = \frac{N_1}{2}$. Sledi $\mathbb{E}(S) = \frac{\lambda}{2}$.

Drugi način. Skupni učinek šokov zapišimo kot Riemann–Stieltjesov integral:

$$S = \int_0^1 s \, \mathrm{d}N_s$$

in uporabimo integracijo po delih:

$$S = N_1 - \int_0^1 N_s \, \mathrm{d}s\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N_1) - \int_0^1 \mathbb{E}(N_s)\, \mathrm{d}s = \lambda - \int_0^1 \lambda s \, \mathrm{d}s = \frac{\lambda}{2}\,.$$

3. *Prvi način.* Računamo lahko preživetveno funkcijo slučajne spremenljivke T, t. j. $\mathbb{P}(T > t)$. Če z N_t označimo število izpitov do časa t, je $T > t$ dogodek, da Zvone izpita ni naredil niti še po N_t poskusih. Iz preživetvene funkcije geometrijske porazdelitve dobimo:

$$\mathbb{P}(T > t \mid N_t = n) = (1 - p)^n$$

in nato po izreku o polni verjetnosti:

$$\mathbb{P}(T > t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\, \mathbb{P}(T > t \mid N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\, (1 - p)^n = e^{-p\lambda t}\,.$$

Torej je $T \sim \mathrm{Exp}(p\lambda)$.

Drugi način. Pogojno na K ima slučajna spremenljivka T porazdelitev Gama(K, λ). Njena pogojna gostota je torej za $t > 0$ enaka:

$$f_{T|K=k}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \, e^{-\lambda t} \, .$$

Brezpogojno gostoto dobimo s seštetjem:

$$f_T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(K = k) \, f_{T|K=k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \, \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(k-1)!} \, e^{-\lambda t} = p\lambda \, e^{-p\lambda t} \, .$$

Spet dobimo $T \sim \mathrm{Exp}(p\lambda)$.

Tretji način. Opazimo, da dejstvo, da je K porazdeljena geometrijsko, pomeni isto kot to, da Zvone v vsakem poskusu naredi z verjetnostjo p, neodvisno od ostalih poskusov. Če Zvone hipotetično dela izpite tudi potem, ko že naredi, in je Z_t število izpitov, ki jih je Zvone naredil do časa t, iz principa redčenja sledi, da je $Z_t \sim \mathrm{Pois}(p\lambda t)$. Tako lahko zaključimo, da je:

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(Z_t = 0) = e^{-p\lambda t} \, ,$$

tako kot pri prvem načinu.

4. *Prvi način.* Najprej izračunamo pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke T glede na N_t. Če je $N_t \in \{0, 1\}$, predzadnji prihod ne obstaja in velja $T = 0$. Za $n = 2, 3, 4, \ldots$ pa velja:

$$\begin{aligned}
F_{T|N_t=n}(s) &= \mathbb{P}(T \le s \mid N_t = n) = \\
&= \mathbb{P}(N_s \in \{n-1, n\} \mid N_t = n) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s \in \{n-1, n\}, N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = n-1, N_t - N_s = 1) + \mathbb{P}(N_s = n, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = n)} = \\
&= ns^{n-1} - \frac{(n-1)s^n}{t} \, ,
\end{aligned}$$

torej:

$$f_{T|N_t=n}(s) = n(n-1) \left(s^{n-2} - \frac{s^{n-1}}{t} \right) \, .$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N_t = n) = \frac{n-1}{n+1} \, t \, .$$

Torej velja:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\, \mathbb{E}(T \mid N_t = n) = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}\, \frac{n-1}{n+1}\, t = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} \right) (\lambda t)^n\, t\, e^{-\lambda t} = \\
&= \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \frac{2}{\lambda t} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \right) t\, e^{-\lambda t} = \\
&= \frac{(\lambda t + 2) e^{-\lambda t} + \lambda t - 2}{\lambda} \,.
\end{aligned}
$$

Drugi način. Dani proces hipotetično razširimo nazaj v zgodovino pred čas 0. Če ga gledamo od časa T nazaj, spet dobimo homogen Poissonov proces. Predzadnji prihod v izvirnem procesu, če obstaja, ustreza drugemu prihodu v novem procesu. Čas tega drugega prihoda označimo z $\tilde{S}_2$. Velja:

$$
T = \begin{cases} t - \tilde{S}_2 & ;\ \tilde{S}_2 \le t \\ 0 & ;\ \tilde{S}_2 \ge t \end{cases} \,.
$$

Slučajna spremenljivka $\tilde{S}_2$ ima porazdelitev Gama$(2, \lambda)$, ki ima gostoto:

$$
f_{\tilde{S}_2}(s) = \lambda^2 s\, e^{-\lambda s}
$$

za $s > 0$. Torej je:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) = \lambda^2 \int_0^t (t - s) s\, e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s &= \frac{\lambda^2 s(s-t) + \lambda(2s - t) + 2}{\lambda}\, e^{-\lambda s} \Big|_0^t = \\
&= \frac{(\lambda t + 2) e^{-\lambda t} + \lambda t - 2}{\lambda} \,.
\end{aligned}
$$