# Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 11. 4. 2013

Finančna matematika

**1.** Za $n$-ti prihod po osnovni ekvivalenci velja:

$$F_{S_n}(t) = \mathbb{P}(S_n \le t) = \mathbb{P}(N_t \ge n) = \mathbb{P}(N_t + 1 > n) = \left(1 - e^{-t}\right)^n .$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(S_1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1\,,$$

$$\mathbb{E}(S_2) = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-t}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(2\,e^{-t} - e^{-2t}\right)\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,.$$

**2.** Izkoristimo, da je število metov čas ustavljanja glede na zaporedje števil pik v posameznih metih. Torej lahko uporabimo Waldovo identiteto, po kateri je pričakovano skupno število pik enako produktu pričakovanega števila metov in pričakovanega števila pik pri posameznem metu. Število metov je porazdeljeno geometrijsko Geom(1/3), število pik pri posameznem metu pa diskretno enakomerno na množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pričakovano skupno število pik je torej enako:

$$3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} = 10\dot{}5\,.$$

**3.** a) Naj bo $A_n$ dogodek, da se je $n$-ti prihod zgodil do časa $a$, obenem pa mu v naslednjih $b$ časovnih enotah ne sledi noben prihod (torej v časovnem intervalu od $S_n$ do $S_n + b$ ni nobenega prihoda). Bolj formalno:

$$A_n = \{S_n \le a, T_{n+1} > b\}$$

Iz neodvisnosti medprihodnih časov ter dejstva, da je $S_n \sim \mathrm{Gama}(n, \lambda)$ in $T_{n+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, sledi:

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n \le a)\,\mathbb{P}(T_{n+1} > b) = \frac{e^{-b\lambda}}{(n-1)!}\int_0^a \lambda^n t^{n-1}\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,.$$

To pa lahko zapišemo tudi še drugače: po osnovni ekvivalenci je $\{S_n \le a\} = \{N_a \ge n\}$. Ker je $N_a \sim \mathrm{Pois}(a\lambda)$, velja tudi:

$$\mathbb{P}(A_n) = e^{-b\lambda}\,\mathbb{P}(N_a \ge n) = \sum_{k=n}^\infty \frac{a^k \lambda^k\,e^{-(a+b)\lambda}}{k!}\,.$$

b) *Prvi način.*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-b\lambda}}{(n-1)!}\int_0^a \lambda^n t^{n-1}\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = e^{-b\lambda}\int_0^a \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = e^{-b\lambda}\int_0^a \lambda\,\mathrm{d}t =$$
$$= a\lambda\,e^{-b\lambda}\,.$$

*Drugi način.*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b\lambda} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a^k \lambda^k \, e^{-a\lambda}}{k!} = e^{-(a+b)\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{a^k \lambda^k}{k!} = e^{-(a+b)\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k \lambda^k}{(k-1)!} =$$
$$= a\lambda \, e^{-b\lambda} \, .$$

*Tretji način.* Ker $X$ šteje, koliko dogodkov $A_n$ se je zgodilo, velja:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = e^{-b\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_a \geq n) = e^{-b\lambda} \, \mathbb{E}(N_a) = a\lambda \, e^{-b\lambda} \, .$$

*Četrti način* (ne potrebujemo točke a)). Naj bo $Y_n$ indikator dogodka, da $n$-temu prihodu v naslednjih $b$ časovnih enotah ne sledi noben prihod. Očitno je $Y_n$ neodvisna od $T_1, T_2, \ldots T_n$. Nadalje velja:

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N \, ,$$

kjer je $N$ definiran na enega od naslednjih treh ekvivalentnih načinov:

- število prihodov v časovnem intervalu $[0, a]$;
- zadnji indeks, za katerega je $S_N = T_1 + \cdots + T_N \leq a$;
- prvi indeks, za katerega je $T_1 + \cdots + T_{N+1} > a$.

Če definiramo $Z_n := T_{n+1}$, je $Y_n$ neodvisna od $Z_0, Z_1, \ldots Z_{n-1}$, $N$ pa je prvi indeks, za katerega je $Z_0 + \cdots + Z_N > a$. Torej je $N$ čas ustavljanja glede na zaporedje $Z_0, Z_1, \ldots$. Po Waldovi identiteti je:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N) \, \mathbb{E}(Y_1) = a\lambda \, e^{-b\lambda} \, .$$

**4.** Naj bo $T$ čas, ob katerem pes dobi Binetov briket, $N_t$ število briketov, ki jih Andraž da psu do časa $t$, $\tilde{N}_t$ pa število briketov, ki jih pes požre do časa $t$. Tedaj je:

$$\tilde{N}_t = \begin{cases} N_T + 1 & ; \, T \leq t \\ N_t & ; \, T > t \end{cases} \, .$$

Ker je $\mathbb{E}(N_s) = 3s$ za vse $s \geq 0$ in ker sta Andraž in Bine neodvisna, velja:

$$\mathbb{E}(\tilde{N}_t \mid T) = \begin{cases} 3T + 1 & ; \, T \leq t \\ 3t & ; \, T > t \end{cases} \, .$$

Ker je $T$ porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(1)$, sledi:

$$\mathbb{E}(\tilde{N}_t) = \int_0^t (3s+1) e^{-s} \, \mathrm{d}t + 3t \int_t^{\infty} e^{-s} \, \mathrm{d}s = 4\big(1 - e^{-t}\big) \, .$$