2. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
10. junij 2011

1. Zamudniki prihajajo v skladu z nehomogenim Poissonovim procesom z intenziteto $\rho(t) = e^{-t}$, kjer je t število mesecev zamude.

   a) Kolikšna je verjetnost, da nihče ne zamudi več kot tri mesece?

   b) Recimo, da zamudita natanko dva (ne glede na to, kdaj prideta, t. j. ali zamudita manj ali več kot tri mesece). Izračunajte pogojno pričakovano zamudo zadnjega zamudnika.

2. Lastnik restavracije bi moral, če bi hotel, da je njegov lokal vzdrževan po predpisih, za to nameniti 10 evrov na dan. Inšpekcija opravlja kontrolne preglede v skladu s prenovitvenim procesom s pričakovanim medprihodnim časom 60 dni. Pri pregledu z verjetnostjo $(10 - c)_+/10$ odkrije napako. V tem primeru mora lastnik restavracije plačati globo v višini $100 \cdot (10 - c)_+$ evrov, kjer je c dejanski dnevni znesek v evrih, ki ga lastnik namenja za vzdrževanje.

   Kolikšen dnevni znesek se lastniku dolgoročno najbolj splača namenjati za vzdrževanje restavracije?

3. Novopečeni policist lovi prekrškarje, ki prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim tokom z intenzivnostjo λ. Prvega spregleda, nadaljnje pa ujame. Označimo z N_t število prekrškarjev, ki jih je policist ujel do časa t. Izračunajte $\mathbb{E}(N_t)$.

   Namig: proces N_t lahko obravnavate kot prenovitveni proces z zaostankom – določite porazdelitve T_1 in T_n, $n > 1$.

4. Varnostnik varuje neko stavbo. Njegovi obhodi okoli sefa tvorijo prenovitveni proces z medprihodno porazdelitvijo, ki je enakomerna na intervalu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, merjeno v urah. Najprej je pri sefu, med obhodi ga ni pri sefu, trajanje posameznega obhoda je zanemarljivo.

   a) Označimo z N_t število obhodov do časa t. Izračunajte $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t}$.

   b) Recimo, da je varnostnik do trenutka uro in pol od začetka varovanja sef obhodil natanko enkrat. Kolikšna je pogojna verjetnost, da ga v naslednje pol ure ne bo?