Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 10. 6. 2011

Finančna matematika

1. a) Število zamudnikov, ki zamudijo več kot tri mesece, je porazdeljeno po Poissonu Pois(λ), kjer je:

$$\int_3^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-3}\,.$$

Verjetnost, da ni nobenega takega, pa je enaka:

$$\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-e^{-3}} \doteq 0{,}951\,.$$

b) *Prvi način.* Če tako kot ponavadi z S_2 označimo prihod drugega zamudnika, z N_t pa število prihodov do časa t, velja:

$$\begin{aligned}F_{S_2|N_\infty=2}(t) &= \frac{\mathbb{P}(S_2 \le t, N_\infty = 2)}{N_\infty = 2} = \frac{\mathbb{P}(N_t = 2, N_\infty - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_\infty = 2)} = \\ &= \frac{\frac{(R(t))^2}{2!}\, e^{-R(t)}\, e^{-(R(\infty)-R(t))}}{\frac{(R(\infty))^2}{2!}\, e^{-R(\infty)}} = \left(\frac{R(t)}{R(\infty)}\right)^2,\end{aligned}$$

kjer je $R(t) = \int_0^t \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-t}$. Torej je:

$$F_{S_2|N_\infty=2}(t) = \left(1 - e^{-t}\right)^2,$$

pogojna gostota je enaka:

$$f_2(t) = F_2'(t) = 2\left(e^{-t} - e^{-2t}\right),$$

pogojna pričakovana vrednost pa:

$$\mathbb{E}(S_2 \mid N_3 = 2) = 2\int_0^\infty t\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,.$$

Drugi način. Znano je, da sta pogojno na dogodek, da zamudita natanko dva, na slepo pomešana časa njunih zamud neodvisna, njuna porazdelitev pa je zvezna z intenziteto, ki je sorazmerna z intenziteto Poissonovega procesa. Ker je $\int_0^\infty \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$, je ta pogojna gostota enaka kar ρ, kumulativna porazdelitvena funkcija pa je za $t \ge 0$ enaka:

$$F(t) = \int_0^s \rho(s)\,\mathrm{d}s = 1 - e^{-t}\,.$$

Zamuda zadnjega zamudnika je seveda maksimum (pomešanih) zamud obeh zamudnikov, torej je njena pogojna kumulativna porazdelitvena funkcija enaka:

$$F_{S_2|N_\infty=2}(t) = \left(1 - e^{-t}\right)^2.$$

Nadaljujemo tako kot pri prvem načinu.

Tretji način. Znano je, da je pogojno na dogodek, da zamudita natanko dva, pogojna navzkrižna gostota njunih prihodov enaka:

$$f_{S_1,S_2|N_\infty=2}(s_1,s_2) = \begin{cases} 2!\,\dfrac{\rho(s_1)\,\rho(s_2)}{R(\infty)} & ;\ 0 \le s_1 \le s_2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases},$$

kjer sta ρ in R tako kot pri prvem načinu. Za $0 \le s_2 \le s_2$ torej velja:

$$f_{S_1,S_2|N_\infty=2}(s_1,s_2) = 2\,e^{-s_1-s_2}\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_2 \mid N_\infty = 2) &= \iint_{\mathbb{R}^2} s_2 f_{S_1,S_2|N_\infty=2}(s_1,s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 = 2\int_0^\infty e^{-s_1}\int_{s_1}^\infty s_2\,e^{s_2}\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1 = \\ &= 2\int_0^\infty (s_1+1)\,e^{-2s_1}\,\mathrm{d}s_1 = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

2. Označimo z W_t skupni znesek glob, ki jih mora lastnik restavracije plačati do časa t. To je prenovitveni proces z "nagradami" $R_1, R_2, \ldots$, ki imajo pričakovane vrednosti $10 \cdot (10-c)_+^2$, in medprihodnimi časi $T_1, T_2, \ldots$, ki imajo pričakovano vrednost 60 dni. Torej skoraj gotovo velja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{(10-c)_+^2}{6}\,.$$

Če s C_t označimo lastnikove stroške z vzdrževanjem z globami vred, velja $C_t = ct + W_t$, torej skoraj gotovo velja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_t}{t} = f(c) := c + \frac{(10-c)_+^2}{6}\,.$$

Za $c \in [10,\infty)$ je $f(c)$ naraščajoča funkcija, za $c \in [0,10]$ pa po odvajanju:

$$f'(c) = \frac{c-7}{3}$$

dobimo, da je minimum dosežen pri $c = 7$.

3. Označimo $M(t) := \mathbb{E}(N_t)$. Gre za prenovitveni proces z zaostankom, pri čemer ima prvi (med)prihodni čas porazdelitev $\mathrm{Gama}(2,\lambda)$, ki ima Laplaceovo transformiranko:

$$\hat{G}(z) = \frac{\lambda^2}{(z+\lambda)^2}\,,$$

nadaljnji medprihodni časi pa imajo eksponentno porazdelitev $\mathrm{Exp}(\lambda)$ z Laplaceovo transformiranko:

$$\hat{F}(z) = \frac{\lambda}{z+\lambda}\,.$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je torej enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1 - \hat{F}(z)} = \frac{\lambda^2}{z(z+\lambda)} = \frac{\lambda}{z} - \frac{\lambda}{z+\lambda}\,,$$

prenovitvena mera sama pa znaša:

$$M(t) = \lambda \int_0^t \mathrm{d}s - \lambda \int_0^s e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \lambda t - 1 + e^{-\lambda t}\,.$$

4. a) Če s $T_1, T_2, \ldots$ označimo medprihodne čase, velja $\mathbb{E}(T_i) = \frac{4}{3}$, torej $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{4}{3}$.

b) Ker je medprihodni čas navzgor omejen z 1, varnostnik v dveh urah skoraj gotovo obišče sef vsaj dvakrat. Če ga torej je v prvi uri in pol obhodil natanko enkrat, ga bo v naslednje pol ure skoraj gotovo vsaj še enkrat. Iskana pogojna verjetnost je torej enaka nič.