2. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
14. junij 2012

1. Odprla se je nova telefonska linija vedeževanja in klici nanjo prihajajo v skladu s nehomogenim Poissonovim procesom s funkcijo intenzivnosti:

$$\rho(t) = \frac{t}{1+t}\,.$$

   Recimo, da je prvi klic na to linijo prišel pred časom 2. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je pred časom 2 prišel tudi drugi klic na to linijo?

2. Na sejmu na določenem mestu občasno delijo nagrade. Nagrado dobijo vsi, ki so ob tem času tam. Delitve tvorijo prenovitveni proces, čigar medprihodna porazdelitev je enakomerna na intervalu od 20 do 40 minut. Ob času nič Tonček ravno vidi, da delijo nagrade, prihiti, a je prepozen. Nato čaka, da vnovič delijo nagrade, a največ 30 minut: po tem času se naveliča in gre drugam. Brž ko začnejo deliti nagrade, spet prihiti, a je za tedanjo delitev prepozen in spet čaka ponovno delitev nagrad, a največ 30 minut. Tako ponavlja, dokler ne dobi nagrade. Označimo s T čas, ob katerem Tonček končno dobi nagrado. Izračunajte $\mathbb{E}(T)$. Privzamemo, da je sejem odprt v nedogled.

3. Življenjska doba avtomobila v letih (čas do prve resne okvare) je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f(t) = \begin{cases} t/50 & ;\ 0 < t < 10 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

   Avto uporabljamo, dokler ne pride do prve resne okvare ali pa dokler ne preteče t_1 let – kar pride prej. Nato avto zamenjamo za novega. Nov avto stane 10.000 evrov, a če ob menjavi še ni prišlo do resne okvare, lahko za starega iztržimo še 3.000 evrov, sicer pa nič.

   Kako naj nastavimo čas t_1, da bodo dolgoročni stroški z menjavo avtomobilov najnižji?

4. V homogenem Poissonovem procesu gledamo le *lihe* prihode (t. j. prvega, tretjega, petega, ...). Naj bo $\tilde{N}_t$ število lihih prihodov do časa t. Izračunajte $\mathbb{E}(\tilde{N}_t)$.