Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 14. 6. 2012

Finančna matematika

1. *Prvi način.* Kot običajno označimo z N_t število klicev do časa t. Tedaj lahko pogojno verjetnost, ki je vprašanje naloge, zapišemo kot $\mathbb{P}(N_2 \ge 2 \mid N_2 \ge 1)$. Ker je $N_2 \sim \mathrm{Pois}\big(R(2)\big)$, kjer je:

$$R(2) = \int_0^2 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2 - \ln 3\,,$$

je:

$$\mathbb{P}(N_2 \ge 2 \mid N_2 \ge 1) = \frac{\mathbb{P}(N_2 \ge 2)}{\mathbb{P}(N_2 \ge 1)} = \frac{1 - \big(1 + R(2)\big)e^{-R(2)}}{1 - e^{-R(2)}} = \frac{1 - (9 - 3\ln 3)e^{-2}}{1 - 3\,e^{-2}} = \doteq 0{\cdot}384\,.$$

Drugi način: pogojujemo na čas prvega klica, T_1. Če z A označimo dogodek, da drugi klic pride pred časom 2, moramo izračunati:

$$\mathbb{P}(A \mid T_1 < 2) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T_1 < 2)}\,.$$

Najprej izračunajmo porazdelitev časa T_1. Za $t \ge 0$ velja:

$$F_{T_1}(t) = \mathbb{P}(T_1 \le t) = \mathbb{P}(N_t \ge 1) = 1 - \exp\left(\int_0^t \frac{s}{1+s}\,\mathrm{d}s\right) = 1 - (1+t)e^{-t}\,.$$

Od tod takoj dobimo $\mathbb{P}(T_1 < 2) = \mathbb{P}(T_1 \le 2) = 1 - 3\,e^{-2}$, nato pa še gostoto:

$$f_{T_1}(t) = t\,e^{-t}\,.$$

Nadalje je pogojno na T_1 število klicev v časovnem intervalu od T_1 do 2 porazdeljeno po Poissonu s parametrom:

$$\int_{T_1}^2 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2 - T_1 - \ln 3 + \ln(T_1 + 1)\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{P}(A \mid T_1) = \big(1 - e^{-(2 - T_1 - \ln 3 + \ln(T_1+1))}\big)\,\mathbb{1}(T_1 \le 2) = \left(1 - \frac{3\,e^{T_1 - 2}}{T_1 + 1}\right)\mathbb{1}(T_1 \le 2)\,.$$

Torej velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{3\,e^{T_1-2}}{T_1+1}\right)\mathbb{1}(T_1 \le 2)\right] = \\
&= \int_0^2 \left(1 - \frac{3\,e^{t-2}}{t+1}\right) f_{T_1}(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^2 \left(t\,e^{-t} - \frac{3\,e^{-2}\,t}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \\
&= 1 - (9 - \ln 3)\,e^{-2}\,.
\end{aligned}$$

Po deljenju dobimo želeni rezultat, ki je seveda isti kot prej.

2. *Prvi način.* Postavimo se v trenutek, ko prvič naslednjič delijo nagrade, in ga označimo s T_1. Če je $T_1 \le 30$, Tonček takrat dobi nagrado, zato je tedaj $T = T_1$. Sicer pa se vse začne na novo: Tonček mora od tega trenutka naprej čakati še čas T', ki je pogojno na zgodovino porazdeljen enako kot T. Torej velja:

$$T = T_1 + T' \, \mathbb{1}(T_1 > 30)\,,$$

od koder sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T)\, \mathbb{P}(T_1 > 30) = 30 + \frac{1}{2}\, \mathbb{E}(T)\,,$$

torej je $\mathbb{E}(T) = 60$. Drugače povedano, Tonček lahko pričakuje, da bo čakal eno uro.

Drugi način. Označimo z N delitev, pri kateri Tonček dobi nagrado, pri čemer izvzamemo delitev ob času nič, ki jo Tonček v vsakem primeru zamudi. Če s $T_1, T_2, \ldots$ označimo medprihodne čase v procesu deljenja nagrad, velja:

$$\{N = n\} = \{T_1 > 30,\ T_2 > 30, \ldots T_{n-1} > 30,\ T_n \le 30\}\,.$$

Na dogodku $\{N = n\}$ je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ in pogojno na $\{N = n\}$ so $T_1, \ldots T_{n-1}$ porazdeljeni enakomerno na intervalu od 30 do 40 minut (torej za $k = 1, \ldots n-1$ velja $\mathbb{E}(T_k \mid N = n) = 35$), T_n pa je porazdeljen enakomerno na intervalu od 20 do 30 minut (torej je $\mathbb{E}(T_n \mid N = n) = 25$). Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N) = 35(N-1) + 25\,.$$

Ker je N porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/2)$, je $\mathbb{E}(N) = 2$. Sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}\big[35(N-1) + 25\big] = 60\,.$$

Tretji način. Z oznakami iz drugega načina je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$. Opazimo, da je N čas ustavljanja, saj je dogodek $\{N = n\}$ enolično določen s $T_1, T_2, \ldots T_n$ (glej zgoraj). Po Waldovi identiteti je potem $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\, \mathbb{E}(T_1) = 2 \cdot 30 = 60$.

Četrti način. Naj bodo tako kot prej $T_1, T_2, \ldots$ medprihodni časi v prenovitvenem procesu deljenja nagrad. Nadalje si zamislimo še, da Tonček v nedogled hodi po nagrade. Tedaj tudi te Tončkove nagrade tvorijo prenovitveni proces. Označimo njegove medprihodne čase s $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots$ (torej je $T = \tilde{T}_1$).

Označimo z W_t število nagrad, ki jih Tonček dobi do časa t. To lahko izrazimo na naslednja dva načina: s prenovitvenim procesom Tončkovih nagrad in s prenovitvenim procesom splošnega deljenja nagrad, ki mu pripišemo še nagrade $R_1, R_2, \ldots$, kjer je $R_n = 1$, če Tonček ob n-tem deljenju dobi nagrado, sicer pa je $R_n = 0$. Velja $\mathbb{P}(R_n = 0) = \mathbb{P}(R_n = 1) = 1/2$. Po krepkem zakonu velikih števil za oba prenovitvena procesa je skoraj gotovo:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(\tilde{T}_1)} = \frac{1}{\mathbb{E}(T)} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)}\,,$$

torej mora biti:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\mathbb{E}(T_1)}{\mathbb{E}(R_1)} = 60\,.$$

3. Stroški z menjavo avtomobilov tvorijo prenovitveni proces z nagradami. Medprihodna porazdelitev je enaka porazdelitvi slučajne spremenljivke $\min\{Z, t_1\}$, kjer je Z čas do prve resne okvare avtomobila. Če so torej $T_1, T_2, \ldots$ medprihodni časi, velja:

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}\big[\min\{Z, t_1\}\big] = \int_0^{t_1} t \cdot \frac{t}{50}\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{10} t_1 \cdot \frac{t}{50}\,\mathrm{d}t = t_1 - \frac{t_1^3}{300}\,.$$

Nadalje, če z $R_1, R_2, R_3, \ldots$ označimo stroške posameznih menjav, velja:

$$R_1 = \begin{cases} 10000 & ;\ Z \le t_1 \\ 7000 & ;\ Z > t_1 \end{cases}\,.$$

Torej je:

$$\mathbb{E}(R_1) = 10000 \int_0^{t_1} \frac{t}{50}\,\mathrm{d}t + 7000 \int_{t_1}^{10} \frac{t}{50}\,\mathrm{d}t = 7000 + 30\,t_1^2\,.$$

Dolgoročni stroški menjave na časovno enoto so torej:

$$h(t_1) = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{7000 + 30\,t_1^2}{t_1 - \frac{t_1^3}{300}}$$

Poiskati moramo minimum po t_1 na intervalu $(0, 10]$. Opazimo, da gre $h(t)$ proti neskončno, ko gre t proti nič. Nadalje velja:

$$h'(t) = 9000\,\frac{t^4 + 1000t^2 - 70000}{(300\,t - t^3)^2}$$

Ker je $h'(10) = 9000 \cdot 40000/2000^2 > 0$, je minimum dosežen v stacionarni točki v notranjosti intervala. Edina stacionarna točka na danem intervalu pa je:

$$t_1 = \sqrt{\frac{-1000 + \sqrt{1280000}}{2}} \doteq 8{\cdot}1\,.$$

Avto se torej najbolj splača menjati na vsakih dobrih 8 let.

4. Označimo z λ intenzivnost izvirnega homogenega Poissonovega procesa. Iskani proces je prenovitveni proces z zaostankom, pri čemer je prvi prihodni čas porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, nadaljnji medprihodni časi pa imajo porazdelitev $\mathrm{Gama}(2, \lambda)$. Laplaceova transformiranka prvega prihodnega časa je torej enaka:

$$\hat{G}(z) = \frac{\lambda}{z + \lambda}\,,$$

Laplaceova transformiranka nadaljnjih medprihodnih časov pa je enaka:

$$\hat{F}(z) = \frac{\lambda^2}{(z+\lambda)^2}\,.$$

Iščemo prenovitveno mero iskanega prenovitvenega procesa. Njena Laplace–Stieltjesova transformiranka je enaka:

$$\hat{\tilde{M}}(z) = \frac{G(z)}{1-F(z)} = \frac{\lambda(z+\lambda)}{z(z+2\lambda)} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+2\lambda}\right)\,,$$

prenovitvena mera sama pa je enaka:

$$\mathbb{E}(\tilde{N}_t) = \frac{\lambda}{2}\int_0^t \left(1 + e^{-2\lambda s}\right) \mathrm{d}s = \frac{\lambda t}{2} + \frac{1-e^{2\lambda t}}{4}\,.$$