Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 6. 6. 2013

Finančna matematika

1. a) $1 - \exp\left(-\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) = 1 - e^{-1} \doteq 0{\cdot}632.$

b) $1 - \exp\left(-\int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) = 1 - e^{-(1-e^{-1})} \doteq 0{\cdot}469.$

c) Če z X označimo število prepoznih ponudnikov, je $X = N - \mathbb{1}_A$, kjer je N število vseh ponudnikov, A pa je dogodek, da vsaj ena ponudba pride pravočasno. Velja:

$$\mathbb{E}(N) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

Torej je:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N) - \mathbb{P}(A) = e^{-(1-e^{-1})} \doteq 0{\cdot}531\,.$$

2. Zaradi preglednejšega zapisa označimo s $t_0 = 10^{-4}$ s dolžino celotnega intervala, ki ga gledamo, z $\delta = 6 \cdot 10^{-5}$ s dolžino posameznega mrtvega intervala, z $\lambda = 50.000/s$ pa intenzivnost prihajanja žarkov. Nadalje označimo s $T_1, T_2, T_3, \ldots$ dolžine časovnih intervalov, v katerih števec *zaznava* žarke. Naj bo še M skupna dolžina mrtvega časa do trenutka t_0. Tedaj velja naslednje:

- Če je $T \geq t_0$, je $M = 0$.
- Če je $t_0 - \delta \leq T_1 < t_0$, je $M = t_0 - T_1$.
- Če je $T_1 < t_0 - \delta$ in $T_2 \geq t_0 - T_1 - \delta$, je $M = \delta$.
- Če je $T_2 < t_0 - T_1 - \delta$, je $M = t_0 - T_1 - T_2$.

Sledi:

$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}\Big[(t_0 - T_1)\,\mathbb{1}(t_0 - \delta \leq T_1 < t_0)\Big] + \delta\,\mathbb{P}(T_1 < t_0 - \delta, T_2 \geq t_0 - T_1 - \delta) + \\ + \mathbb{E}\Big[(t_0 - T_1 - T_2)\,\mathbb{1}(T_1 + T_2 < t_0 - \delta)\Big]\,.$$

Ker žarki tvorijo homogen Poissonov proces in ker velja krepka lastnost Markova, sta T_1 in T_2 porazdeljeni eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, njuna vsota $T_1 + T_2$ pa ima porazdelitev $\mathrm{Gama}(2, \lambda)$. Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M) &= \int_{t_0-\delta}^{t_0} (t_0 - x)\,e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \delta\lambda^2 \int_0^{t_0-\delta} e^{-\lambda x} \int_{t_0-x-\delta}^\infty e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \\ &\quad + \lambda^2 \int_0^{t_0-\delta} (t_0 - z) z\,e^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda t_0} + \left(t_0 - \delta + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda(t_0-\delta)} + t_0 - \frac{2}{\lambda} = \\ &= 6{\cdot}83 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}\,.\end{aligned}$$

3. Gre za prenovitveni proces z nagradami. Označimo s T_1 čas vožnje po avtocesti, s T_2 pa čas vožnje po stari cesti. Tedaj je dolžina medprihdnega intervala porazdeljena enako kot $T_1 + T_2$, nagrada pa je enaka T_2. Če čas merimo v urah, je $T_1 = 1$. Čas T_2 pa je slučajen, in sicer je enak $120/V$, kjer je V povprečna hitrost potovanja po stari cesti. Torej velja:

$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{20} \int_{60}^{80} \frac{120}{v} \, \mathrm{d}v = 6 \ln \frac{80}{60} \doteq 1\text{˙}726 \,.$$

Po krepkem zakonu velikih števil je iskani delež časa enak:

$$\frac{\mathbb{E}(T_2)}{\mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2)} \doteq 0\text{˙}633 \,.$$

4. a) Čas prvega prihoda je porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(1/t_0)$, porazdelitev nadaljnjih medprihodnh časov pa se ujema s porazdelitvijo slučajne spremenljivke, ki je z verjetnostjo $1-p$ enaka nič, z verjetnostjo p pa je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(1/t_0)$.
b) Poiskati je potrebno prenovitveno mero. Velja:

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{1 + t_0 z} \,, \qquad \hat{F}(z) = 1 - p + \frac{p}{1 + t_0 z} \,,$$

od koder najprej dobimo:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1 - \hat{F}(z)} = \frac{1}{p t_0 z} \,,$$

torej je iskana prenovitvena mera $M(t) = \dfrac{t}{p t_0}$.