1. naloga [10 točk]

Vozila prihajajo do avtocestnega predora skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda = 2$/minuto. Za vožnjo skozi predor morajo vozniki osebnih vozil plačati 5 EUR, vozniki avtobusov 10 EUR, vozniki tovornjakov pa 25 EUR predornine. Privzemite, da je med vsemi vozili 70% osebnih avtomobilov, 20% avtobusov in 10% tovornjakov.

(4) (a) Izračunajte matematično upanje in disperzijo zneska, prejetega s predorninami v izbrani uri.

(3) (b) Izračunajte verjetnost, da v izbranih treh zaporednih minutah *v vsaki* minuti poberejo natanko 15 EUR predornine.

(3) (d) Zaradi nujnih vzdrževalnih del so predor za krajši čas zaprli. Do ponovnega odprtja se je pred predorom zbralo 50 vozil, od tega 7 tovornjakov. Določite porazdelitev števila osebnih ~~avtomobilov~~ vozil, ki so v tem času obtičali pred predorom.

O ... osebno vozilo   5 EUR   70%

A ... avtobus   10 EUR   20%

T ... tovornjak   25 EUR   10%

N_t homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda = 2$

$N_t = N_t^O + N_t^A + N_t^T$

N_t^O h.P.p. z intenzivnostjo $\lambda^O = 0{,}7 \cdot 2 = 1{,}4$

N_t^A h.P.p. z intenzivnostjo $\lambda^A = 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$ 1

N_t^T h.P.p. z intenzivnostjo $\lambda^T = 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2$

} neodvisni procesi 1

(a) X prejet znesek v eni uri

$X = 5 \cdot N_{60}^O + 10 \cdot N_{60}^A + 25 \cdot N_{60}^T$

$N_{60}^O \sim Pois(84)$

$N_{60}^A \sim Pois(24)$

$N_{60}^T \sim Pois(12)$

$E(X) = 5 \cdot 84 + 10 \cdot 24 + 25 \cdot 12 =$

$= 960$ 1

$D(X) = 25 \cdot 84 + 100 \cdot 24 + 625 \cdot 12 =$

$= 12000$ 1

(b) $P(\text{v 3 zaporednih minutah} \dots) =$ zaradi neodvisnosti prirastkov

$= [P(\text{v 1 minuti} \dots)]^3 =$ 1

↳ 3 osebna vozila

↳ 1 osebno vozilo + 1 avtobus 1

$$= \left[P(N_1^O = 3, N_1^A = 0, N_1^T = 0) + P(N_1^O = 1, N_1^A = 1, N_1^T = 0) \right]^3 =$$ neodvisnosti procesov

$$= \left[\frac{(1{,}4)^3}{3!} e^{-1{,}4} \cdot e^{-0{,}4} \cdot e^{-0{,}2} + 1{,}4 \cdot e^{-1{,}4} \cdot 0{,}4 \cdot e^{-0{,}4} \cdot e^{-0{,}2} \right]^3 =$$ 1

$N_1^O \sim Pois(1{,}4)$

$N_1^A \sim Pois(0{,}4)$

$N_1^T \sim Pois(0{,}2)$

$$= \left[e^{-2} \left(\frac{1{,}4^3}{6} + 1{,}4 \cdot 0{,}4 \right) \right]^3 =$$

$= 0{,}0026$

(d) Podatek o štetju tovornjakov zaradi neodvisnosti procesov pove le, da je osebnih vozil in avtobusov skupaj 43 1

$\tilde{N}_t = N_t^O + N_t^A$ je h.P.p z intenzivnostjo $\lambda = 1{,}8$

↳ markiramo skoke $I_i \sim \begin{pmatrix} O & A \\ \frac{1{,}4}{1{,}8} & \frac{0{,}4}{1{,}8} \end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow$ # osebnih vozil je binomska $\left(43, \frac{1{,}4}{1{,}8}\right) =$

$= \text{bin}\left(43, \frac{7}{9}\right)$ 1

2. naloga [10 točk]

Do prizorišča velikega koncerta na prostem vodi le ena dolga ravna cesta. Ker ob prizorišču ni parkirnih mest, obiskovalci svoja vozila parkirajo kar vzdolž ceste.

Naj slučajna spremenljivka L_k označuje dolžino k-tega vozila v vrsti. Privzemite, da so spremenljivke L_k zvezne, nenegativne, neodvisne in vse enako porazdeljene z ~~gostoto g in~~ upanjem $\mu < \infty$.

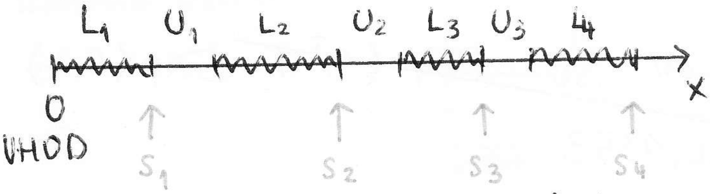
Prvi obiskovalec svoje vozilo parkira direktno ob vhodu, naslednja vozila pa se razvrstijo tako, da so med njimi presledki dolžine U_k, kjer so U_k neodvisne slučajne spremenljivke, vse porazdeljene enakomerno na $[0, 1]$. Privzemite še neodvisnost $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $\{L_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Naj N_x označuje število vozil, ki v celoti ležijo na razdalji največ $x \geq 0$ od vhoda.

(4) (a) Dokažite, da je N_x prenovitveni proces z zaostankom.

(6) (c) Korektno izračunajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{N_x}{x}$.

(a)



1

L_i dolžine avtov $\sim g$, $E(L_i) = \mu$

U_i presledki $\sim U(0,1)$

$S_1, S_2, S_3, \ldots$ so prenovitveni trenutki v procesu N_x

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= S_1 \\ T_2 &= S_2 - S_1 = U_1 + L_2 \\ T_3 &= S_3 - S_2 = U_2 + L_3 \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \text{ medprihodni časi } \quad 1$$

U_i NEP, L_i NEP, med sabo neodvisni

$\Rightarrow$ $U_i + L_j$ NEP pri poljubnem i, j

$\Rightarrow$ $T_2, T_3, \ldots$ NEP 1

$T_1 = S_1 \nsim T_2$ drugače porazdeljena 1

$\Rightarrow$ N_x prenovitev z zaostankom

(c) Definiramo proces X_x : število avtomobilov, ki se začnejo na razdalji največ x od vhoda 2

(lepše: štejemo presledke)

Proces X_t ima medprihodno porazdelitev podano z $T_i = L_i + U_i$ za $\forall i$

$\Rightarrow$ prenovitveni proces brez zaostanka

Velja $X_0 = 1$, kar ni problem.

Lahko uporabimo asimptotiko: $\lim_{x \to \infty} \frac{X_x}{x} = \frac{1}{E(T_i)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \mu}$ 2

Ocenimo: $X_x - 1 \leq N_x \leq X_x \quad / : x$

pri x je avto

pri x je presledek

$$\Rightarrow \quad \frac{X_x - 1}{x} \leq \frac{N_x}{x} \leq \frac{X_x}{x} \quad 2$$

$$\frac{X_x - 1}{x} \xrightarrow{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + \mu}, \qquad \frac{X_x}{x} \xrightarrow{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + \mu}$$

Po pravilu sendviča je $\lim_{x \to \infty} \frac{N_x}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \mu}$

3. naloga [15 točk]

Receptorka sprejema telefonske klice. Naj čas 0 označuje začetek njenega delovnega dneva, čas 8 pa konec. Privzemite, da pojavljanje telefonskih klicev lahko opišete z nehomogenim Poissonovim procesom s trenutno intenzivnostjo $\rho(t) = \sqrt{t}$, kjer čas $t \in [0, 8]$ merimo v urah. Dolžino klicev zanemarite.

(4) (a) Izračunajte verjetnost, da receptorka v prvi uri dela sprejme manj kot dva klica.

(4) (b) Privzemite, da je v prvi uri receptorka sprejela 2 telefonska klica. Kakšna je pogojna verjetnost, da bo v naslednjih 3 urah sprejela vsaj dva klica?

(7) (d) Privzemite, da je receptorka v prvi uri prejela 3 klice. Izračunajte pogojno matematično upanje časa tretjega klica S_3.

Nehomogen Poissonov proces N_t, trenutna intenzivnost $\rho(t) = \sqrt{t}$

ⓐ $N_1 \sim \text{Pois}\left(\int_0^1 \rho(t)\,dt \right) = \text{Pois}\left(\frac{2}{3}\right)$ 2

$$\int_0^x \rho(t)\,dt = \int_0^x \sqrt{t}\,dt = \left.\frac{t^{3/2}}{3/2}\right|_0^x = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow P(N_1 < 2) = P(N_1 = 0) + P(N_1 = 1) = e^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}} = 0{,}8557$$ 2

ⓑ Pogojni pomemben, saj so prirastki neodvisni

$N_4 - N_1 \sim \text{Pois}\left(\int_1^4 \rho(t)\,dt \right) = \text{Pois}\left(\frac{2}{3}4 \cdot 2 - \frac{2}{3} \right) = \text{Pois}\left(\frac{14}{3}\right)$ 2

$$P(N_4 - N_1 \geq 2) = 1 - P(N_4 - N_1 = 0) - P(N_4 - N_1 = 1) =$$

$$= 1 - e^{-\frac{14}{3}} - \frac{14}{3}e^{-\frac{14}{3}} = 0{,}9467$$ 2

(d) Poznamo pogojno porazdelitev časov skokov (S_1, S_2, S_3)

$$(S_1, S_2, S_3) \mid N_1 = 3 \sim 3! \, \frac{\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\sqrt{S_3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \cdot 1_{\{0 \le S_1 \le S_2 \le S_3 \le 1\}}$$ 2

Rabimo robno gostoto S_3

$$f_{S_3}(s_3) = \int_0^{s_3} ds_1 \int_{s_1}^{s_3} ds_2 \, \frac{3! \sqrt{s_1 s_2 s_3} \cdot 27}{8} = 2$$

Lepše: $\int_0^{s_3} ds_2 \int_0^{s_2} ds_1 (\dots) =$

$$= \frac{6 \cdot 27}{8} \sqrt{s_3} \int_0^{s_3} ds_1 \sqrt{s_1} \, \frac{s_2\sqrt{s_2}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{s_2=s_1}^{s_2=s_3} =$$

$$= \frac{\cancel{3}\,\cancel{6} \cdot 27}{\cancel{24} \cdot \cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \sqrt{s_3} \int_0^{s_3} ds_1 \sqrt{s_1} \left(s_3\sqrt{s_3} - s_1\sqrt{s_1} \right) =$$

$$= \frac{27}{2} \sqrt{s_3} \left(s_3\sqrt{s_3} \, \frac{s_1\sqrt{s_1}}{\frac{3}{2}} - \frac{s_1^3}{3} \right) \Bigg|_{s_1=0}^{s_1=s_3} =$$

$$= \frac{27}{2} \sqrt{s_3} \left(s_3\sqrt{s_3} \, s_3\sqrt{s_3} \cdot \frac{2}{3} - s_3^3 \cdot \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{27}{2} s_3^3 \sqrt{s_3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{27}{2} s_3^3 \sqrt{s_3} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{9}{2} s_1^{\frac{7}{2}} \quad \text{za} \quad s_1 \in [0,1]$$ 2

$$E(S_3) = \int_0^1 s_1 \cdot \frac{9}{2} s_1^{\frac{7}{2}} \, ds_1 = \int_0^1 \frac{9}{2} s_1^{\frac{9}{2}} \, ds_1 =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{s_1^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}} \Bigg|_0^1 = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{11} \cdot (1 - 0) = \frac{9}{11}$$ 1

4. naloga [15 točk]

Mestni avtobusi številka 1 podnevi z obračališča v Vižmarjih odhajajo vsakih 6 minut. Zaradi nepredvidljivih prometnih razmer v Šiški in centru mesta pa lahko odhode avtobusov s postajališča Jadranska v smeri Mestni log dobro opišemo s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda = 10$/uro. PAZI! OSTALI PODATKI SO V MINUTAH

Trije študentje Oddelka za matematiko hkrati končajo predavanja in želijo priti v Mestni log. Skupaj pridejo do postajališča Jadranska. V trenutku njihovega prihoda tam ni avtobusa.

Privzemite, da pešec za pot od postajališča Jadranska do Mestnega loga potrebuje A minut, kjer je A zvezna slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno na intervalu $[10, 15]$, avtobus pa isto pot opravi v B minutah, kjer je B diskretna ~~in~~ slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno na $\{3, 8\}$. ter neodvisna od prihodov na Jadransko.

Študent *matematike* do Mestnega loga vedno pešači, študent *pedagoške matematike* pa se vedno pelje z avtobusom. Študent *finančne matematike* za pot uporablja naslednjo strategijo: Najprej na postajališču čaka 3 minute. Če v tem času pripelje avtobus, se odpravi z avtobusom, sicer pa odide peš.

(8) (a) Določite porazdelitev časa, ki ga za pot do Mestnega loga porabi finančni matematik.

Nasvet: Najprej določite zalogo vrednosti te slučajne spremenljivke, nato pa njeno porazdelitveno funkcijo. 2 2+2+2

(4) (b) Izračunajte pričakovane čase prihodov študentov v Mestni log.

(3) (c) Privzemite, da na postajališču srečajo študenta fizike, ki jim prijazno pove, da sam na avtobus čaka že 3 minute. Kako se spremenijo vaši odgovori pri nalogi (a) in (b).

(a) Možni načini, kako FM pride v Mestni log

- bus, ki vozi 3 minute : min: 3 , max: 3 + 3 = 6
  - min: takoj pride bus
  - max: bus pride po 3 minutah
- bus, ki vozi 8 minut : min : 8 , max : 3 + 8 = 11
- peš : min : 3 + 10 , max 3 + 15 = 18

X = čas za pot $\Rightarrow Z_X = [3,6] \cup [8,11] \cup [13,18]$ 2

Porazdelitvena funkcija: izven Z_X je konstantna

$F_X(x) = P(X \leq x)$

1) $3 \leq x \leq 6 \Rightarrow$ vemo, da je šel z busom, ki je vozil 3 minute

Čas čakanja na avtobus je $T \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{6})$

naslednji skok v Poissonovem procesu

čas merimo v minutah

$$P(X\le x) = P(T\le 3,\ B=3,\ T+B\le x) =$$

$$= P(T\le 3,\ B=3,\ T+3\le x) =$$

$$= P(T\le 3,\ B=3,\ T\le x-3) = \qquad B\sim\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ \frac12 & \frac12 \end{pmatrix}$$

avtomatično res

$$= P(B=3,\ T\le x-3) = \qquad \text{očitno neodvisni}$$

$$= P(B=3)\cdot P(T\le x-3) =$$

$$= \frac12\cdot\left(1-e^{-\frac16(x-3)}\right) =$$

$$= \underline{\frac12 - \frac12 e^{\frac12-\frac16 x}} \qquad 2$$

2) $8\le x\le 11 \Rightarrow$ vemo, da je šel z busom, ki je vozil 8 minut

Ko računamo $P(X\le x)$, pa moramo prišteti še maximalno verjetnost od prej

$$P(X\le x) = \frac12-\frac12 e^{\frac12-\frac16\cdot 6} + P(T\le 3,\ B=8,\ T+B\le x) =$$

$$= \frac12-\frac12 e^{-\frac12} + P(T\le 3,\ B=8,\ T\le x-8) =$$

velja

$$= \frac12-\frac12 e^{-\frac12} + P(T\le x-8)\cdot P(B=8) =$$

$$= \frac12-\frac12 e^{-\frac12} + \frac12\left(1-e^{-\frac16(x-8)}\right) =$$

$$= \frac12-\frac12 e^{-\frac12} + \frac12 - \frac12 e^{\frac43-\frac16 x} =$$

$$= \underline{1-\frac12\left(e^{-\frac12}+e^{\frac43-\frac16 x}\right)} \qquad 2$$

3) $13\le x\le 18 \Rightarrow$ vemo, da je šel peš

Prištejemo še maximalno verjetnost od prej

$$P(X\le x) = 1-\frac12\left(e^{-\frac12}+e^{-\frac12}\right) + P(T>3,\ A+3\le x) =$$

$A\sim U(10,15)$; gostota $\frac15$

$= 1-e^{-\frac{1}{2}} + P(T>3)\cdot P(A \leq x-3) =$

$= 1-e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{6}\cdot 3} \cdot \frac{1}{5}(\underbrace{x-3-10}_{\text{dolžina intervala od 10 do } x-3 \geq 10}) =$

$= \underline{1-e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}\cdot \frac{x-13}{5}}$ 2

Računamo limite !

$\lim_{x\downarrow 3} F_X(x) = 0$

$\lim_{x\nearrow 6} F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\downarrow 8} F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\nearrow 11} F_X(x) = 1-e^{-\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\downarrow 13} F_X(x) = 1-e^{-\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\nearrow 18} F_X(x) = 1$

Imamo zvezno porazdelitveno funkcijo, ki je vmes konstantna

Imamo zvezno spremenljivko z gostoto

$f_X(x) = \{ \ \ldots$ ločimo:

- $x \notin Z_X$: 0
- $x \in [3,6]$: $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}$
- $x \in [8,11]$: $-\frac{1}{2}e^{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}x}(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}e^{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}x}$
- $x \in [13,18]$: $\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}}$

(b) Matematik peša $\Rightarrow E(M) = E(A) = \frac{10+15}{2} = 12{,}5$ (minut) 1

Pedagog gre z busom $\Rightarrow E(P) = E(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{čaka}}}{T} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vozi}}}{B}) = 6 + \frac{1}{2}(3+8) = 11{,}5$ (minut) 1

Finančnik $\Rightarrow E(F) = \int_3^6 \frac{1}{12}x e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}dx + \int_8^{11}\frac{1}{12}x e^{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}x}dx + \int_{13}^{18}\frac{1}{5}x e^{-\frac{1}{2}}dx =$

$= 12{,}1065$ (minut) 2

(c) Odgovori se ne spremenijo, saj sta starost in presežek v Poissonovem procesu neodvisna! 3