3. HOMOGENI POISSONOV PROCES

1. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Za $s > 0$ izračunaj
$$\mathrm{P}(N_{t-s} = k \mid N_t = j).$$

2. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$.
   (a) Izračunaj $\mathrm{E}(N_t N_s)$.
   (b) Izračunaj avtokovariančno funkcijo procesa N_t.
   (b) Izračunaj avtokorelacijsko funkcijo procesa N_t.
   (c) Naj bodo $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ časovni trenutki. Izračunaj disperzijo slučajnega vektorja $(N_{t_1}, \ldots, N_{t_n})$.

3. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Definirajmo proces
$$X_t = X_0(-1)^{N_t},$$
kjer je X_0 slučajna spremenljivka, neodvisna od $\{N_t\}_{t\geq 0}$, za katero velja $\mathrm{E}(X_0) = 0$ in $\mathrm{D}(X_0) = \sigma^2$. Izračunaj $\mathrm{E}(X_t)$ in $\mathrm{E}(X_t X_{t+h})$.

4. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Dokaži, da velja:
$$\mathrm{P}(N_t \text{ je liho število}) = e^{-\lambda t}\sinh(\lambda t),$$
$$\mathrm{P}(N_t \text{ je sodo število}) = e^{-\lambda t}\cosh(\lambda t).$$

5. Privzemimo, da prihajanje pacientov v ambulanto lahko modeliramo s Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda = 6/\text{uro}$. Zdravnik ne začne sprejemati pacientov, dokler v čakalnico ne vstopi tretji pacient.
   (a) Izračunaj pričakovani čas, ki preteče od odprtja ambulante do sprejema prvega pacienta.
   (b) Izračunaj verjetnost, da v prvi uri po odprtju ambulante zdravnik ne sprejme nobenega pacienta.

6. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Privzemimo, da se je do trenutka t zgodil le en skok. Čas tega skoka naj bo slučajna spremenljivka S_1. Dokaži, da je pogojna porazdelitev S_1 enakomerna na intervalu $(0, t)$.

7. Potniki prihajajo na železniško postajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Privzemimo, da na začetku opazovanja (čas 0) na postaji ni nobenega potnika in da vlak odpelje s postaje v času t. Naj bo W vsota čakalnih časov vseh potnikov, prispelih do odhoda vlaka. Izračunaj $\mathrm{E}(W)$.

8. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Dokaži, da je proces
$$X_t = N_t - \lambda t$$
martingal glede na filtracijo $\mathcal{F}_t$, generirano z družino slučajnih spremenljivk $\{N_s;\ s \in [0, t]\}$.