4. HOMOGENI POISSONOV PROCES - 2. del

1. *Poissonov eksponentni martingal.* Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Dokaži, da je proces

$$X_t = e^{aN_t} \cdot e^{-\lambda t(e^a - 1)}$$

martingal glede na naravno filtracijo $\mathcal{F}_t$.

2. *Simulacija Poissonovega procesa.* Računalniki običajno generirajo slučajna števila, ki so realizacija zaporedja neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih enakomerno na intervalu $[0, 1]$.

Naj bodo $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na $[0, 1]$. Dokaži, da je za vsak $\lambda > 0$ slučajni proces $\{N_t\}_{t\geq 0}$, definiran z

$$N_t = \max\left\{n;\ -\sum_{k=1}^{n} \log U_k \leq \lambda t\right\},$$

Poissonov proces z intenzivnostjo λ.

3. *Poissonovi šoki.* Privzemimo, da se na časovnem intervalu $[0, \infty)$ šoki pojavljajo skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ. Če se šok zgodi v času 0, potem njegov učinek v času t opišemo s funkcijo $w(t)$. Običajna izbira za w je eksponentna funkcija

$$w(t) = e^{-\theta t}; \theta > 0.$$

Če zaporedne čase šokov označimo z S_i, $i \geq 1$, potem skupen učinek vseh šokov v času t izračunamo kot

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N_t} w(t - S_i).$$

(a) Določi Laplacevo transformacijo spremenljivke X_t.

(b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo X_t.

4. *Casino Poisson.* Privzemimo, da se dogodki pojavljajo skladno s Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ. Ob vsaki pojavitvi se mora igralec odločiti, ali igro prekine ali nadaljuje. Igralec ob vnaprej določenem času T prejme dobitek, če se je ustavil natanko v času zadnjega skoka pred trenutkom T.

Igralec uporablja naslednjo strategijo: ustavi se ob prvem dogodku, ki se zgodi po določenem času s $(0 \leq s \leq T)$ od začetka igre.

(a) Izračunajte verjetnost, da igralec z opisano strategijo ob času T prejme dobitek.

(b) Pri katerem s je verjetnost iz točke (a) največja.

(c) Dokaži, da je pri optimalni strategiji iz (b) verjetnost dobitka enaka e^{-1}.

5. *Kdaj bo kokoška prečkala cesto?* Privzemimo, da promet na cesti lahko dobro opišemo s Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ vozil na minuto. Kokoška, ki v času 0 pride do ceste, želi živa priti na drugo stran. Za prečkanje ceste potrebuje med vozili presledek dolžine vsaj c minut.

   Označimo s $T_1, T_2, \ldots$ medprihodne čase med vozili in naj bo $J = \min\{j;\ T_j > c\}$. Če je $S_n = T_1 + \cdots + T_n$, potem kokoška začne prečkati cesto v trenutku T_{J-1} in pride na drugo stran v trenutku $T_{J-1} + c$. Dokaži, da je

$$\mathrm{E}(S_{J-1} + c) = \frac{e^{\lambda c} - 1}{\lambda}.$$