

## 7. NEHOMOGENI POISSONOV PROCES

1. Izbrana trgovina je odprta vsak dan od 10. do 18. ure. Privzemite, da stranke v trgovino prihajajo skladno z nehomogenim Poissonovim procesom z naslednjo funkcijo trenutne intenzivnosti: od odprtja do 12. ure intenzivnost naraste z 0/uro na 4/uro in nadalje do 14. ure naraste na 6/uro. Nato do 16. ure upade na 2/uro in nadalje do zaprtja na 0/uro. Naraščanje in padanje v vseh intervalih je linearno.

- Določite porazdelitev števila strank v posameznem dnevu.
- Kakšna je verjetnost, da na izbrani dan do 12. ure v trgovino ne vstopi nobena stranka?
- Privzemite, da sta v prvih dveh urah po odprtju prišli natanko dve stranki. Izračunajte pričakovana časa njunih prihodov.

Privzemite, da lastnik nenapovedano nek dan trgovino zapre pol ure prej.

- Kolikšno je pričakovano število izgubljenih strank v tem dnevu?
  - Kakšna je verjetnost, da bo vsaj ena stranka prišla do trgovine, ko bo trgovina nepričakovano zaprta?
2. Naj bo  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  nehomogen Poissonov proces s trenutno intenzivnostjo  $\rho(t)$  in naj bo  $R(t) = \int_0^t \rho(r) dr$ . Za  $s < t$  in  $0 \leq m \leq n$  dokaži, da je

$$P(N_s = m | N_t = n) = \binom{n}{m} \left( \frac{R(s)}{R(t)} \right)^m \left( 1 - \frac{R(s)}{R(t)} \right)^{n-m}.$$

3. Naj bo  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  nehomogen Poissonov proces s trenutno intenzivnostjo  $\rho(t)$ . Naj bo

$$\int_{t_0}^{\infty} \rho(r) dr = \infty$$

za vsak  $t_0 \geq 0$ . Dokažite, da se po vsakem času  $t_0$  skoraj gotovo zgodi vsaj en skok.

4. V recepciji prejemajo telefonske klice skladno z nehomogenim Poissonovim procesom  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ , katerega trenutna intenzivnost je podana za

$$\rho(t) = \begin{cases} 2; & 0 \leq t \leq 6 \quad (\text{ponoči}) \\ 4; & 0 < t < 24 \quad (\text{podnevi}) \end{cases}$$

kjer čas  $t$  merimo v urah in je  $\rho(t) = \rho(t - 24)$  za  $t \geq 24$ . Trajanje nočnega klica je porazdeljeno enakomerno na intervalu  $(0, 2]$ , trajanje dnevnega klica pa enakomerno na intervalu  $(0, 3]$ . Trajanja klicev so med sabo neodvisne slučajne spremenljivke.

- Izračunajte verjetnost, da nek nočni telefonski klic traja dlje kot nek dnevni klic.
- Izračunajte disperzijo števila klicev, ki jih v recepciji sprejmejo v času enega tedna.
- Naj bo  $D$  skupno trajanje vseh klicev, prejetih v enem dnevu. Izračunajte disperzijo spremenljivke  $D$ .

5. Naj bo  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  nehomogen Poissonov proces s trenutno intenzivnostjo  $\rho(t) = \alpha t$ , kjer je  $\alpha$  pozitivna konstanta. Naj bo  $N_0 = 0$  in

$$W_n = \inf\{t > 0; N_t = n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (a) Določi porazdelitev spremenljivke  $W_n$ .
- (b) Določi porazdelitev slučajnega vektorja  $(W_1, W_2 - W_1)$ .