

8. PRENOVITVENI PROCESI

1. Naj bo $\{N_t\}_{t \geq 0}$ prenovitveni proces z medprihodno porazdelitvijo z gostoto

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}, \quad \lambda > 0.$$

(a) Določi prenovitveno mero (funkcijo) $M(t) = E(N_t)$.

(b) Izračunaj $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t}$.

2. Privzemite, da je življenjska doba avtomobila (brez okvar) zvezna slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti h . Oseba uporablja nasledjo strategijo za menjavanje avtomobilov: Nov avto kupi ob prvem izmed naslednjih dogodkov

- stari avto doseže starost T let,
- stari avto se pokvari.

Avtomobile kupuje po pravilu staro za novo. Privzemite, da za novi avto mora vsakič doplačati A evrov, če pa se stari avto pokvari pred iztekom časa T , pred prodajo mora popraviti še starega, kar stane dodatnih B evrov.

Izračunajte dolgoročne povprečne letne stroške, ki jih ima oseba z menjavami avtomobilov.

3. *Alternirajoči prenovitveni proces.* Naj bodo V_1, V_2, \dots neodvisne slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo F in upanjem μ_F in naj bodo U_1, U_2, \dots neodvisne slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo G in upanjem μ_G . Naj bodo še $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ neodvisne med sabo. Privzemite, da alternirajoči prenovitveni proces preživi V_i časa v stanju 1 in nato u_i časa v stanju 2. Nato se cikel v procesu ponovi.

Izračunajte dolgoročni delež časa, ki ga proces preživi v stanju 1.

4. V manjšem kraju stoji banka z le enim bančnim okencem. Privzemite, da stranke prihajajo do banke skladno s homogenim Poissonovim procesom $\{N_t\}_{t \geq 0}$ z intenzivnostjo λ . Potencialna stranka, ki pride do banke, **vstopi** v banko le pod pogojem, da pred bančnim okencem ni nobene stranke. Privzemimo, da so časi strežbe posamezne stranke neodvisni med sabo ter od procesa N_t in porazdeljeni s porazdelitveno funkcijo G s končnim upanjem.

- (a) Naj S_i označuje trenutek, ko v banko vstopi i -ta stranka. Dokaži, da trenutki S_i sestavljajo prenovitveni proces $\{X_t\}_{t \geq 0}$. Določite medprihodno porazdelitev tega procesa.
- (b) Izračunajte dolgoročno intenzivnost prihajanja strank do banke.
- (c) Izračunajte dolgoročno intenzivnost vstopanja strank v banko.
- (d) Izračunajte dolgoročni delež strank, ki vstopijo v banko, med vsemi strankami, ki pridejo do banke.